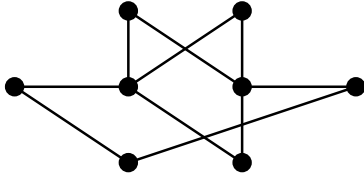
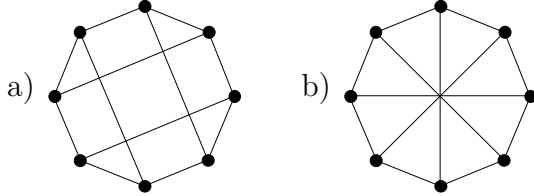


1. Páros gráf-e az alábbi gráf?



2. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, \dots, 30\}$ halmaz. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G -ben, ha az x és y számok különbsége legalább 7. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát. (ZH, 2016. május 9.)

3. Páros gráfok-e az alábbiak?



4. A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői; két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G -ben, ha egy király legföljebb két lépésben el tud jutni az egyikről a másikra. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$ -t.

5. Egy szabályos 11-szögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11 csúcsú, 22 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát. (ZH, 2021. április 30. alapján)

6. A G egyszerű gráfban 2025 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2024. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2025$.

7. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni. (ZH, 2010. március 25.)

8. A G gráf csúcsai legyenek az 5 hosszúságú bitsorozatok (vagyis csupa 0 és 1 tagokból álló sorozatok). Két bitsorozat akkor legyen szomszédos G -ben, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól. Páros gráf-e a G gráf? (ZH, 2016. május 9.)

9. A $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaz legyen a G gráf csúcshalmaza. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét. (ZH, 2003. május 22.)

10. A 12 csúcsú G egyszerű gráf egy 5 csúcsú körből és egy 7 csúcsú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összeköttöttük a másik kör minden csúcsával (egy-egy él mentén). Határozzuk meg G -nek a $\chi(G)$ kromatikus számát és az $\omega(G)$ klikkszámát. (ZH, 2024. május 9.)

11. Egy 9 csúcsú egyszerű gráfnak 21 éle van. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör. (ZH, 2022. június 1.)

12. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legföljebb 10-zel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.

13.a) Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsuk be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden m élű G egyszerű gráfra $m \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

14. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{10, 11, 12, \dots, 49\}$. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G -ben, ha nincs olyan számjegy, ami mindkét megfelelő számban szerepel. (Így például G -ben a 17 szomszédos 35-tel és 42-vel is, de nem szomszédos sem 13-mal, sem 27-tel, sem 41-gyel.) Határozzuk meg G -nek a $\chi(G)$ kromatikus számát. (ZH, 2024. június 5.)

15. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G -ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$. (ZH, 2003. május 13.)

16. Egy sakktáblán világos és sötét huszárok állnak, összesen hét darab. Mindegyik huszár legalább két ellenséges huszárt tud ütni. Mutassuk meg, hogy a világos huszárok mind azonos színű mezőn állnak. (ZH, 2015. április 23.)

17.a) Határozzuk meg egy 100 csúcsú kör komplementerének a kromatikus számát.

b) Határozzuk meg egy 101 csúcsú kör komplementerének a kromatikus számát.

18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges m élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legföljebb $\frac{m}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen.