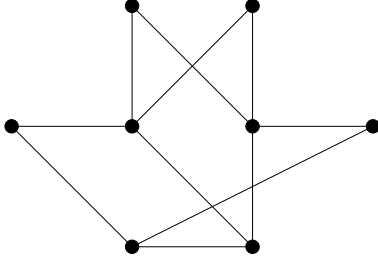
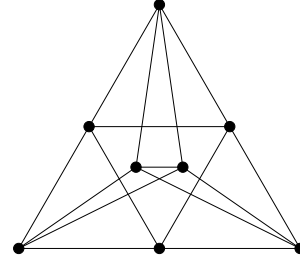


1. Páros gráf-e az alábbi gráf?

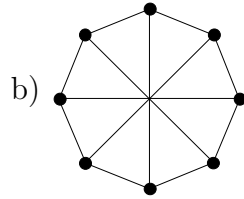
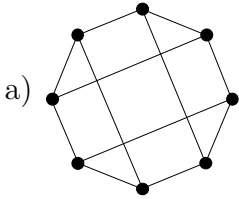


2. Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



3. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, \dots, 30\}$ halmaz. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G -ben, ha az x és y számok különbsége legalább 7. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát. (ZH, 2016. május 9.)

4. Páros gráfok-e az alábbiak?



5. Egy gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői; két különböző csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő mezők egy sorban vagy egy oszlopban vannak. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

6. Egy szabályos nyolcszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (8 csúcsú, 16 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.

7. A G egyszerű gráfban 2021 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legfeljebb 2020. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2021$.

8. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni. (ZH, 2010. március 25.)

9. A G gráf csúcsai legyenek az 5 hosszúságú bitsorozatok (vagyis csupa 0 és 1 tagokból álló sorozatok). Két bitsorozat akkor legyen szomszédos G -ben, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól. Páros gráf-e a G gráf? (ZH, 2016. május 9.)

10. A $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaz legyen a G gráf csúcshalmaza. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét. (ZH, 2003. május 22.)

11. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legfeljebb 10-zel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.

12.a) Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsuk be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden e élű G egyszerű gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

13. A 9 csúcsú G gráf egy 3 és egy 7 csúcsú körből áll úgy, hogy a v csúcs mindkét körben szerepel, de ezen kívül a köröknek nincs közös pontjuk. Határozzuk meg G komplementerének kromatikus számát. (ZH, 2020. május 25.)

14. A G gráf csúcsai legyenek az $u_1, u_2, \dots, u_{2003}, v_1, v_2, \dots, v_{2004}$ pontok. G feszített részgráfja az u_i pontokon egy 2003, a v_i pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül u_i és v_j össze van kötve egymással minden lehetséges i, j értékpár esetén. Mennyi a G gráf kromatikus száma? (ZH, 2004. március 25.)

15. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G -ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$. (ZH, 2003. május 13.)

16.a) Határozzuk meg egy 100 csúcsú kör komplementerének a kromatikus számát.

b) Határozzuk meg egy 101 csúcsú kör komplementerének a kromatikus számát.

17. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb $\frac{e}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen.