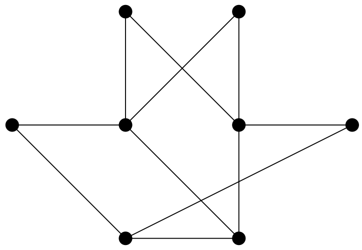
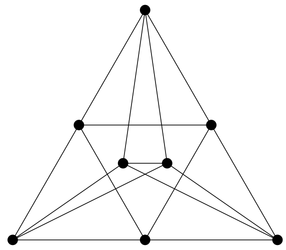
Bevezetés a Számításelméletbe II.
Ötödik gyakorlat, 2016. március 22.

1. Páros gráf-e az alábbi gráf?



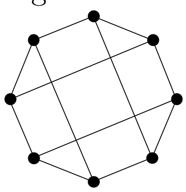
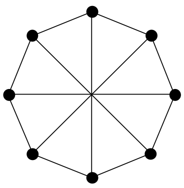
2. Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



3. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2016 közé eső természetes számok. Két különböző csúcsot akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

---

4. Páros gráfok-e az alábbiak?

a)  b) 

5. G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmaz. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét. (ZH, 2003. május 22.)

6. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát. (ZH, 2014. március 20.)

7. A G egyszerű gráfban 2016 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2015. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2016$.

8. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni. (ZH, 2010. március 25.)

---

9. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két szám közül az egyik osztója a másiknak. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t. (ZH, 2009. május 20.)

10. Egy sakktáblán világos és sötét huszárok állnak, összesen hét darab. Mindegyik huszár legalább két ellenséges huszárt tud ütni. Mutassuk meg, hogy a világos huszárok mind azonos színű mezőn állnak. (ZH, 2015. április 23.)

11. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legföljebb 10-zel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.

12. a) Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsuk be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden e élű G egyszerű gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

13. A G gráf csúcsai legyenek az u_1, $u_2, \ldots$, u_{2003}, v_1, $v_2 \ldots$, v_{2004} pontok. G feszített részgráfja az u_i pontokon egy 2003, a v_i pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül u_i és v_j össze van kötve egymással minden lehetséges i, j értékpár esetén. Mennyi a G gráf kromatikus száma? (ZH, 2004. március 25.)

14. Tegyük fel, hogy G egy 2006 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf komplementerének kromatikus számára $\chi(\overline{G}) \geq 400$ áll. (ZH, 2006. március 30.)

15. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G-ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$. (ZH, 2003. május 13.)

16. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legföljebb $\frac{e}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen.

17. Legyen $k \geq 3$ és jelölje G_k azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_k) = k$ és legyen G_k csúcsainak száma n. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G_k}) \geq \frac{n+1}{2}$ (ahol $\overline{G_k}$ a G_k gráf komplementerét jelöli). (ZH, 2009. május 4.)