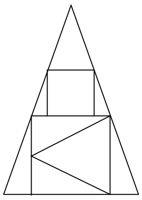
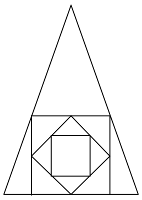
Bevezetés a Számításelméletbe II.

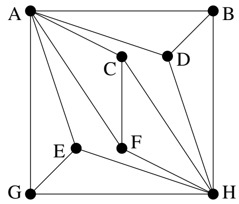
Negyedik gyakorlat, 2017. február 26.-március 2.

1. Ha lehet, rajzoljuk le az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.

a) 

b) 

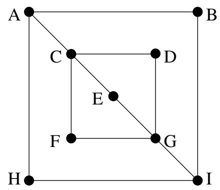
2. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör? (ZH, 2011. március 17.)



3. Egy 11 csúcsú egyszerű gráfban az egyik csúcs foka 5, az összes többi csúcs foka legalább 6. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban van Hamilton-kör. (∼ZH, 2003. március 27.)

---

4. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni a jobbra látható gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör? (ZH, 2011. május 17.)



5. Egy gráf csúcsai egy hételemű halmaz kételemű részhalmazai, két csúcsot összekötünk, ha a halmazok diszjunktak. Van-e Euler-körséta a gráfban?

6. a) Bejárható-e egy 4×4-es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá és a 16. lépésben visszaérkezünk a kiindulási mezőre?

b) Mi a helyzet, ha nem kell visszaérkeznünk a kiindulási mezőre?

7. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem.

8. Bejárható-e egy 5×5-ös sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá és a 25. lépésben visszaérkezünk a kiindulási mezőre?

9. Egy 11 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 5. Mutassuk meg, hogy a gráfban van Hamilton-út.

---

10. Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 5$ esetén létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G-ben és a komplementerében is van Hamilton-kör.

11. Van-e Hamilton-kör az alábbi G gráfokban? És Hamilton-út?

a) Egy 5×5-ös sakktábla egyik sarkát kivágjuk. A maradék 24 mező alkotja G csúcsait és két különböző csúcs akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők él mentén szomszédosak. (ZH, 2013. március 21.)

b) Ugyanaz, mint az a) feladat, csak két átellenes sarkot hagyunk el. (ZH, 2013. március 21.)

c) $V(G) = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 3-mal vagy 5-tel (vagy mindkettővel). (ZH, 2013. május 16.)

12. Egy gráf csúcsai az n hosszú 0-1 sorozatok, két csúcsot összekötünk ha pontosan két helyen térnek el. Van-e Euler-körséta a gráfban?

13. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 9, a többi csúcs foka legalább 10. Mutassuk meg, hogy a gráfban van Hamilton-út.

14. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú, 9-reguláris, egyszerű gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-körsétája. (ZH, 2008. május 22.) (Egy G gráf r*-reguláris*, ha G-ben minden pont foka r.)

15. Mutassunk olyan 8 csúcsú G egyszerű, összefüggő gráfot, melyre G komplementere is összefüggő és sem G-ben, sem a komplementerében nincs Hamilton-út.

16. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges: bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legföljebb milyen hosszú hangsor készíthető ezen a nyelven, ha bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legföljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban? (ZH, 2012. március 12.)

17. Legyen G egy 101 csúcsú egyszerű gráf, amelyben az egyik pont foka 50, az összes többi pont foka 49. Bizonyítsuk be, hogy G-hez hozzá lehet venni 50 darab élet úgy, hogy a kapott gráf továbbra is egyszerű gráf legyen és tartalmazzon Euler-körsétát. (ZH, 2009. március 23.)