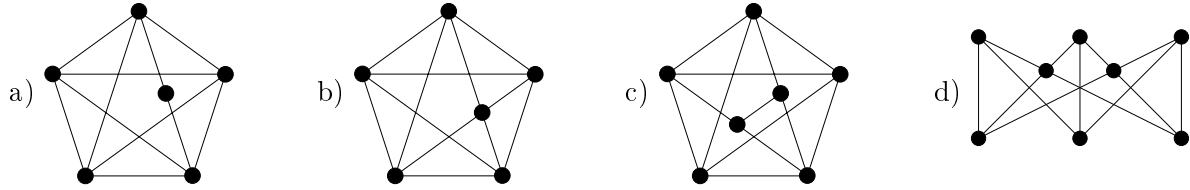


1. Egy egyszerű síkbarajzolt gráfban minden csúcs foka 4, az élek száma pedig 16. Határozzuk meg a tartományok számát.

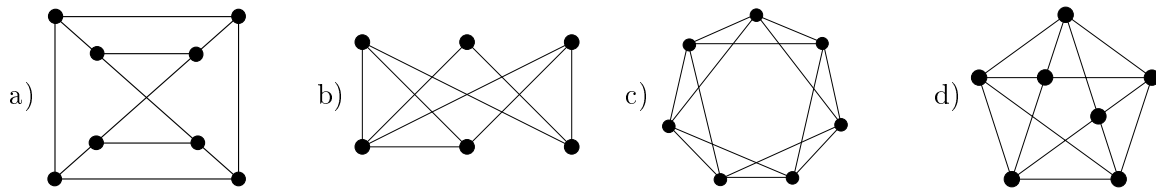
2. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



3. Van-e olyan egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint tartománya?

---

4. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



5. Mutassuk meg, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráfban van olyan csúcs, melynek foka legfeljebb 5.

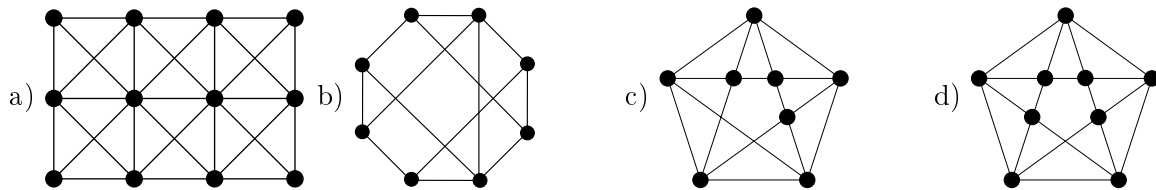
6. Legyen  $G$  egy 13 pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  és a komplementere közül legalább az egyik nem síkbarajzolható. (ZH, 2005. december 19.)

7. Egy konvex poliédernek (vagyis síklapok által határolt testnek) 20 csúcsa és 12 lapja van. A poliéder minden lapját ugyanannyi él határolja. Mennyi ez a közös érték?

8. Mutassuk meg, hogy ha a  $K_8$  gráfot lerajzoljuk a síkra úgy, hogy három él nem metszheti egymást közös pontban, akkor legalább 10 élkereszteződés keletkezik.

---

9. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



10. a) Legyen  $G$  legfeljebb 6 pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  és a komplementere közül legalább az egyik síkbarajzolható.

b) Adjunk meg olyan 8 csúcsú egyszerű, nem síkbarajzolható gráfot, melynek a komplementere sem síkbarajzolható.

11. a) A  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráfban minden pont foka legalább 5. Mutassuk meg, hogy ekkor  $G$ -nek legalább 12 darab 5 fokú csúcsa van.

b) Igaz-e ez az állítás 12 helyett 13-mal?

12. Tegyük fel, hogy  $G = (V, E)$  olyan egyszerű gráf, aminek  $E$  élhalmaza előáll az  $E_1, E_2, E_3$  diszjunkt élhalmazok uniójaként. Utóbbiakra teljesül, hogy a  $(V, E_1)$ ,  $(V, E_2)$  és  $(V, E_3)$  részgráfok mindegyike a  $G$  egy feszítőfája. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $G$  nem síkbarajzolható. (ZH, 2005. december 8.)

13. Minimálisan hány élkeresztezéssel lehet lerajzolni a  $K_{4,4}$  (négy ház, négy kút) gráfot, ha három él nem metszheti egymást közös pontban?

14. Mutassuk meg, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráf csúcsai megszínezhetők 6 színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.