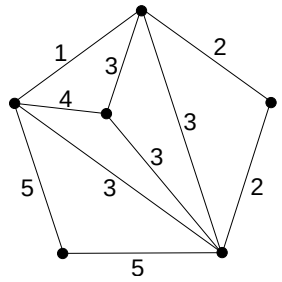
Bevezetés a Számításelméletbe II.

Harmadik gyakorlat, 2015. szeptember 22.,24.



1. Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.

2. Egy egyszerű síkbarajzolt gráfban minden csúcs foka 4, az élek száma pedig 16. Határozzuk meg a tartományok számát.

---

3. Rajzoljuk le az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)

4. Egy konvex poliédernek (vagyis síklapok által határolt testnek) 20 csúcsa és 12 lapja van. A poliéder minden lapját ugyanannyi él határolja. Mennyi ez a közös érték?

5. Legyen G egyszerű, összefüggő síkbarajzolt gráf, melynek minden tartományát 6 él határolja. Mutassuk meg, hogy G-nek van legfeljebb 2 fokú csúcsa.

6. Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokú pontjainak száma 100? (ZH, 2004. december 16.)

7. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan feszítőfája, mely e-t és f-et is tartalmazza.

8. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, melyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) összefüggő gráfot kapunk.

---

9. Az n csúcsú G gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma k. Hány éle van G-nek?

10. Legyen G n csúcsú egyszerű síkbarajzolt gráf, melybe bármely $\overline{G}$-beli élet behúzva élkereszteződés keletkezik. Határozzuk meg G éleinek számát.

11. Egy konvex poliéder minden lapja (nem feltétlen szabályos) négyszög vagy nyolcszög. Tudjuk továbbá, hogy a poliéder minden csúcsában pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és a nyolcszöglapok számának a különbsége? (ZH, 2000. január 12.)

12. Egy 20 csúcsú, 3 komponensű gráfnak 18 éle van. Mutassuk meg, hogy a komponensek közül pontosan kettő fa.

13. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

14. Egy élsúlyozott, összefüggő G gráfban minden él súlya legföljebb 100. Tudjuk, hogy G-ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élet. Mutassuk meg, hogy ekkor G minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élet.

15. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)

16. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden (w-re nézve) minimális összsúlyú feszítőfája megkapható, mint a Kruskal-algoritmus egyik lehetséges futásának az eredménye.