

1. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{2, 3, 4, \dots, 21\}$ és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G -ben, ha közülük a kisebbik osztója a nagyobbiknak.

a) Hány komponense van G -nek?

b) Adjunk meg egy feszítőfát G mindegyik komponensében.

2. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

3. a) Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja lehet, ha a 3 fokúak száma 5?

b) Rajzoljunk két olyan, a feltételeknek megfelelő fát, amikben a 2 fokú pontok száma különböző.

4. Egy 23 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út. (ZH, 2017. május 15.)

5. A 10 csúcsú G egyszerű gráfban teljesül, hogy bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \leq k \leq 10$, a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek legalább 36 éle van. (ZH, 2023. május 18.)

6. Hány csúcsa lehet egy olyan fának, amiben a csúcsok fokszámai között pontosan kétféle érték fordul elő és mindkettő ugyanannyiszor? (ZH, 2019. május 20. alapján)

7. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a gráfnak van három különböző feszítőfája. (ZH, 2017. május 8.)

8. A G gráf csúcsai legyenek a 4 hosszúságú bitsorozatok és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G -ben, ha az egyikből megkapható a másik pontosan két bit megváltoztatásával.

a) Hány komponense van G -nek?

b) Adjunk meg egy feszítőfát a $(0, 0, 0, 0)$ csúcs komponensében.

9. A 100 csúcsú és 80 élű G gráf nem tartalmaz kört. Hány komponense lehet G -nek?

10. Hány 3 fokú csúcsa lehet egy olyan húsz csúcsú fának, aminek pontosan tíz 1 fokú és pontosan egy 10 fokú csúcsa van? (ZH, 2024. május 28.)

11. A G gráfnak 20 csúcsa, 18 éle és 3 komponense van. Hány fa lehet G komponensei között?

12.a) Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

b) Rajzoljunk le (vázlatosan) egy, a feltételeknek megfelelő fát.

13. A 10 csúcsú G egyszerű gráfnak van olyan éle, amit G minden köre tartalmaz. Előfordulhat-e, hogy G éleinek a száma

a) 10;

b) 11?

(ZH, 2024. június 5.)

14. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.) (ZH, 2017. március 16.)

15. Egy fában a legnagyobb fokú csúcs foka Δ . Bizonyítsuk be, hogy a fának legalább Δ darab 1 fokú csúcsa van.

16. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan feszítőfája, mely e -t és f -et is tartalmazza.

17. Létezik-e olyan (legalább két csúcsú) összefüggő gráf, aminek bármelyik csúcsát törölve (az éleivel együtt) a kapott gráf már nem összefüggő?

18. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)

19. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.