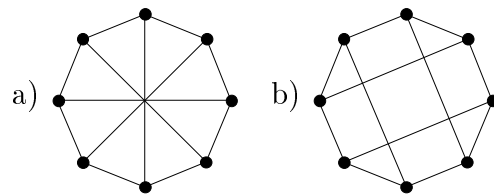


1. Létezik-e olyan fa, melyben a pontok fokai rendre 1,1,1,1,3,4, illetve 1,1,1,1,2,3,3,4?

2. Egy  $G$  gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcset akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak)  $G$ -vel?



3. Egy  $n$  pontú egyszerű gráfban minden pont fokai legalább  $\frac{n}{2}$ . Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő.

4. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

a)  $n = 5, e = 2$

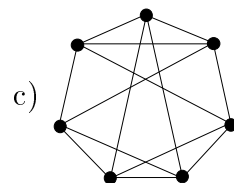
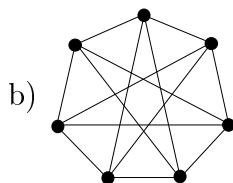
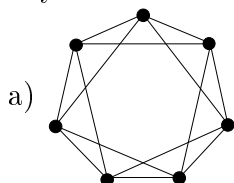
b)  $n = 5, e = 3$

c)  $n = 4, e = 5$

d)  $n = 5, e = 7$

ahol  $n$  jelöli a pontok számát,  $e$  az élek számát.

5. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



6. a) Egy fában minden pont fokai 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokúak száma 5?

b) Rajzoljunk három olyan, a feltételeknek megfelelő fát, melyekben a 2 fokú pontok száma különböző.

7. Egy 20 csúcsú, 3 komponensű gráfnak 18 éle van. Mutassuk meg, hogy a komponensek közül pontosan kettő fa.

8. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont fokai legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

9. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcset, melyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) összefüggő gráfot kapunk.

10. Egy  $3 \times 3$ -as sakktábla oszlopait betűzzük (balról jobbra) az A, B, C betűkkel, sorait számozzuk (alulról fölfelé) az 1, 2, 3 számokkal. A táblán az A2 és C2 mezőkön áll egy-egy világos huszár, a B1 és B3 mezőkön egy-egy sötét huszár. A huszárak a sakk szabályai szerinti lépéseket tehetnek, egy mezőn egyszerre csak egy bábú állhat. Elérhető-e, hogy végül a világos huszárak az A2 és B1, a sötétek a B3 és C2 mezőkön álljanak?

11. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok fokai rendre

a) 1,2,2,3,3,3;

b) 1,1,2,2,3,4,4;

c) 2,3,3,4,5,6,7;

d) 1,3,3,4,5,6,6?

12. Rajzoljuk le az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)

13. Milyen  $n$  számokra létezik olyan  $n$  csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcset fokai különböző?

14. Legyen  $G$  egyszerű, összefüggő gráf,  $e$  és  $f$  pedig  $G$  két éle. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van olyan feszítőfája, mely  $e$ -t és  $f$ -et is tartalmazza.

15. Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

16. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.

17. Hány különböző, páronként nem izomorf 50 csúcsú és 1223 élű egyszerű gráf létezik?

18. Az  $n$  csúcsú  $G$  gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma  $k$ . Hány éle van  $G$ -nek?

19. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

20\*. Egy  $n \geq 3$  csúcsú teljes gráf éleit valaki megszínezte  $n$  különböző színnel. Mutassuk meg, hogy a csúcsok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az általuk meghatározott 3 él közül bármely kettő különböző színű.