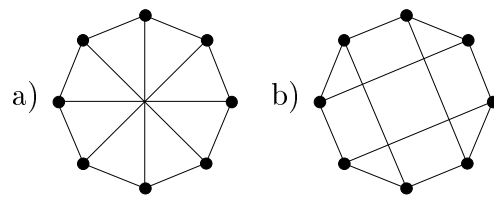
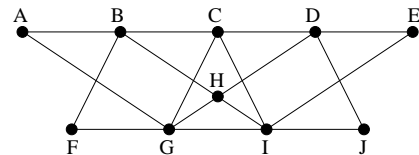


1. Egy  $G$  gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcset akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak)  $G$ -vel?



2. Egy  $n$  pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $\frac{n}{2}$ . Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő.

3. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden  $v$  csúcsra  $v$  távolságát a kezdőponttól és azt a csúcsot, ahonnan az eljárás  $v$ -t elérte).



- a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E
- b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J

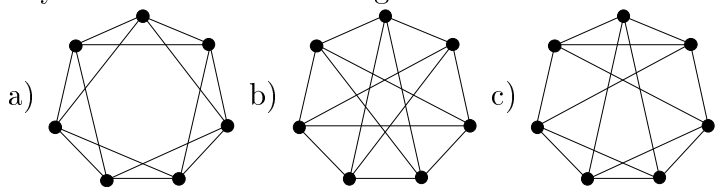
4. A 20 csúcsú  $G$  egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfeljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van  $G$ -nek? (ZH, 2015. március 19.)

5. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

- a)  $n = 5, e = 2$       b)  $n = 5, e = 3$
- c)  $n = 4, e = 5$       d)  $n = 5, e = 7$
- e)  $n = 5, e = 8$

ahol  $n$  jelöli a pontok számát,  $e$  az élek számát.

6. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



7. Oldjuk meg a 3. feladatot a csúcsok alábbi sorrendjeire is.

- a) J, D, I, C, E, G, H, A, F, B
- b) A, B, G, C, H, F, I, D, E, J

8. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

9. Egy  $3 \times 3$ -as sakktábla oszlopait betűzzük (balról jobbra) az A, B, C betűkkel, sorait számozzuk (alulról felfelé) az 1, 2, 3 számokkal. A táblán az A2 és C2 mezőkön áll egy-egy világos huszár, a B1 és B3 mezőkön egy-egy sötét huszár. A huszárak a sakk szabályai szerinti lépéseket tehetnek, egy mezőn egyszerre csak egy bábú állhat. Elérhető-e, hogy végül a világos huszárak az A2 és B1, a sötétek a B3 és C2 mezőkön álljanak?

10. Milyen  $n$  pozitív egészekre létezik olyan  $n$  csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs foka különböző?

11. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

- a) 1,2,2,3,3,3;      b) 1,1,2,2,3,4,4;      c) 2,3,3,4,5,6,7;      d) 1,3,3,4,5,6,6.

12. A  $G$  összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az  $s$  csúcsából indított BFS algoritmus a  $v$  csúcsot tizenharmadikként éri el (az elsőként elért csúcsnak  $s$ -et tekintjük). Előfordulhat-e, hogy  $v$  távolsága  $s$ -től

- a) 2;      b) 3;      c) 8?

13. Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

14. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.

15. Hány különböző, páronként nem izomorf 50 csúcsú és 1223 élű egyszerű gráf létezik? És 50 csúcsú, 1222 élű?

16. Adott  $G$  gráf és  $s$  csúcs esetén a feladatunk eldönteni, hogy  $G$ -ben van-e  $s$ -et tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálni az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét. Módosítsuk a BFS algoritmust úgy, hogy ennek a feladatnak a megoldására is alkalmassá váljon.