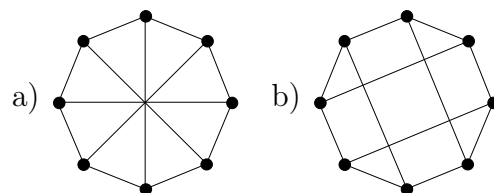


1. Egy  $G$  gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcset akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak)  $G$ -vel?



2. Van-e olyan fa, amelyben a pontok foka rendre

a) 1,1,1,1,3,4;

b) 1,1,1,1,2,3,3,4?

3. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

a)  $n = 4, e = 5$

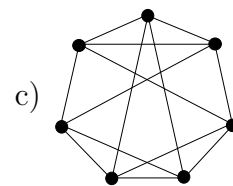
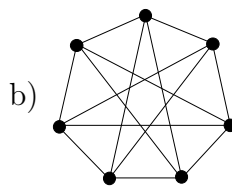
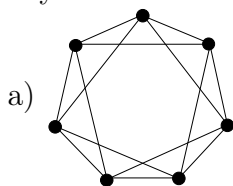
b)  $n = 5, e = 3$

c)  $n = 5, e = 7$

d)  $n = 5, e = 8$

ahol  $n$  jelöli a pontok számát,  $e$  az élek számát.

4. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



5. a) Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokúak száma 5?

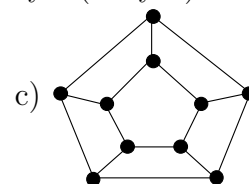
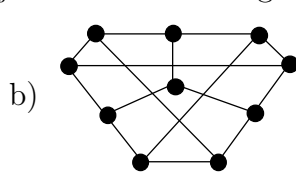
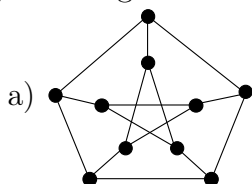
b) Rajzoljunk két olyan, a feltételeknek megfelelő fát, amelyekben a 2 fokú pontok száma különböző.

6. Egy  $n$  pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $\frac{n}{2}$ . Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?

7. Milyen  $n$  pozitív egészekre létezik olyan  $n$  csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs foka különböző?

8. Rajzoljuk fel az összes, legfőljebb 5 csúcsú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)

9. A  $G$  gráf pontjai legyenek az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmaz 2 elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az alábbi gráfok közül melyik (melyek) izomorf(ak)  $G$ -vel?



10. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

a) 1,2,2,3,3,3;

b) 1,1,2,2,3,4,4;

c) 2,3,3,4,5,6,7;

d) 1,3,3,4,5,6,6.

11. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

12.a) Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

b) Rajzoljunk le (vázlatosan) egy, a feltételeknek megfelelő fát.

13. A 20 csúcsú  $G$  egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfőljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van  $G$ -nek? (ZH, 2015. március 19.)

14. Egy fában a legnagyobb fokú csúcs foka  $\Delta$ . Bizonyítsuk be, hogy a fának legalább  $\Delta$  darab 1 fokú csúcsa van.

15. Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

16. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintjük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)

17. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.