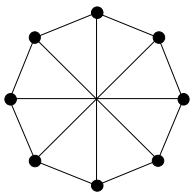
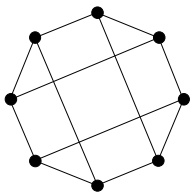
Bevezetés a Számításelméletbe II.

Első gyakorlat, 2025. február 11.

1. Egy G gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak) G-vel?

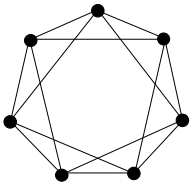
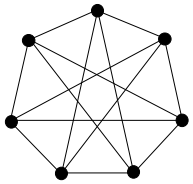
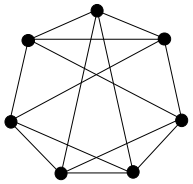
a)  b) 

2. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre
a) $n = 5$, $m = 2$ b) $n = 4$, $m = 5$
ahol n jelöli a pontok számát, m az élek számát.

---

3. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre
a) $n = 5$, $m = 3$ b) $n = 5$, $m = 8$
ahol n jelöli a pontok számát, m az élek számát.

4. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?

a)  b)  c) 

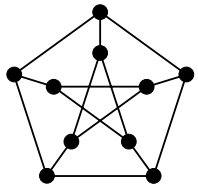
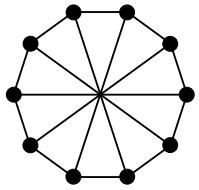
5. a) Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont, az egy fokú csúcsok száma pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van. (ZH, 2020. május 8.)
b) Igaz-e az is, hogy minden ilyen gráfnak legalább 20 éle van?
(Az izolált pont kifejezés nulla fokú csúcsot jelent – vagyis olyat, amire egyetlen él sem illeszkedik.)

6. A 6 csúcsú G egyszerű gráfból irányított gráfot készítettünk úgy, hogy G minden élét véletlenszerűen az egyik vagy a másik irányba irányítottuk. Végül azt vettük észre, hogy a kapott irányított gráfban bármely két csúcs kifoka (vagyis a csúcsból kilépő élek száma) különböző. Rajzoljuk le a kapott irányított gráfot.

7. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Mutassuk meg, hogy a gráf bármelyik csúcsából el lehet jutni bármelyik másikba az élek mentén lépegetve.

---

8. A G gráf pontjai legyenek az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz 2 elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. A jobbra látható gráfok közül melyik (melyek) izomorf(ak) G-vel?

a)  b) 

9. A 100 csúcsú G irányított gráfban minden csúcs kifoka legalább annyi, mint a befoka (ahol egy csúcs kifoka, illetve befoka alatt az abból kilépő, illetve az abba belépő élek számát értjük). G egyik csúcsának a kifoka 18. Mennyi lehet ugyanennek a csúcsnak a befoka?

10. a) Milyen n pozitív egészekre létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs foka különböző?
b) A 6 csúcsú G gráf hurokélt nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy G bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van G-nek? (Azaz: milyen k egészre teljesül, hogy létezik a feltételeknek megfelelő k élű gráf, de k-nál kevesebb élű már nem?) (ZH, 2016. március 24.)

11. Hány különböző, páronként nem izomorf 50 csúcsú és 1223 élű egyszerű gráf létezik?

12. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legföljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G-nek? (ZH, 2015. március 19.)

13. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. G-ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G-ben, ha $|x - y| \leq 2$. Izomorf-e a G gráf a saját komplementerével? (ZH, 2023. június 14.)

14. Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a saját komplementerével? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az összes, páronként nem izomorf ilyen gráfot.

15. Kovács úr és a felesége négy házaspárt látott vendégül. Érkezéskor a jelenlévők közül bizonyosak kezet fogtak egymással. Mikor már mindenki megérkezett, Kovács úr mindenkitől megkérdezte, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet Kovács úr felesége? (Természetesen senki sem fogott kezet a saját házastársával.)