Bevezetés a Számításelméletbe II.

Első gyakorlat, 2019. február 4-8.

1. Egy fagyizóban 26 féle fagyit árulnak: **A**nanász, **B**anán, **C**itrom, . . . , **Z**öldalma. Hányféleképpen adhat a kiszolgáló fagyit egy vendégnek, ha annak az alábbi kérései vannak (de minden mást a kiszolgálóra bíz)?

a) 4 gombócot kér tölcsérbe; azt az egyet köti ki, hogy ne 4 ugyanolyan gombócot kapjon.

b) Egy gombóc **A**-t, egy **B**-t, két **C**-t és három gombóc **D**-t kér tölcsérbe.

c) 5 különböző gombócot kér tölcsérbe, de ne legyen közte **F**ahéj.

d) 5 különböző gombócot kér tányérra, de ha van közte **F**ahéj, akkor ne legyen **N**arancs.

e) 5 tetszőleges gombócot kér tányérra, de ne legyen közte **D**ió.

f) 35 gombócot kér tányérra úgy, hogy minden íz szerepeljen, de semelyik se szerepeljen kettőnél többször.

2. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét két tizedesjegy pontossággal. (ZH, 2010. november 25.)

$$\log_2\left(\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{50}\right)$$

---

3. Hányféleképp adhat a kiszolgáló fagyit az 1. feladat fagyizójában, ha a vendégnek az alábbi kérései vannak?

a) 5 különböző gombócot kér tölcsérbe, de legyen közte **K**ókusz.

b) 5 tetszőleges gombócot kér tölcsérbe, de legyen közte (legalább egy) **D**ió.

c) 5 különböző gombócot kér tányérra, de legyen közte **S**penót.

d) 5 tetszőleges gombócot kér tányérra, de legyen közte (legalább egy) **H**upikék törpike.

4. Hány olyan 5 elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, amelyikben több a páros szám, mint a páratlan? (ZH, 2015. május 4.)

5. Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 30. Mindegyik osztály 4 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?

6. Egy számkombinációs zár 6 különböző, 1 és 30 közötti szám begépelésével nyitható ki. Tudjuk, hogy a kódban a számok növekvő sorrendben vannak. Hány próbálkozással lehet a zárat biztosan kinyitni (vagyis hány ilyen kód készíthető)?

7. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét két tizedesjegy pontossággal. (ZH, 2010. december 15.)

$$\log_2\left(1\cdot\binom{32}{1}+2\cdot\binom{32}{2}+3\cdot\binom{32}{3}+\ldots+32\cdot\binom{32}{32}\right)$$

---

8. Hányféleképp választható ki 15 házaspár tagjai (tehát összesen 30 ember) közül 10 ember úgy, hogy a kiválasztott emberek között pontosan 3 házaspár legyen? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.) (ZH, 2011. november 24.)

9. Hány olyan 12 hosszúságú betűsorozat készíthető az angol ábécé 26 betűjéből, amelyben pontosan 4 darab **X** és három darab **Y** betű szerepel? (ZH, 2015. március 19.)

10. Gyula szenvedélyesen ötöslottózik, minden héten 20 szelvénnyel játszik. (Az ötöslottóban egy szelvényen 1 és 90 között 5 különböző számot kell beikszelni.) Hányféleképpen töltheti ki egy héten a szelvényeit, ha

a) teljesen vaktában tölti ki a szelvényeket;

b) arra azért vigyáz, hogy két szelvényt ne töltsön ki ugyanúgy;

c) nem csak arra vigyáz, hogy két szelvényt ne töltsön ki ugyanúgy, hanem arra is, hogy a 7 pontosan 7 szelvényen szerepeljen;

d) semmi másra nem figyel, csak arra, hogy ha a 13 szerepel egy szelvényen, akkor szerepeljen a 7 is?

11. Hány különböző 3×3-as négyzetes részmátrixa van egy olyan 8×10-es (vagyis 8 sorú és 10 oszlopú) mátrixnak, melynek minden eleme különböző? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.) (ZH, 2011. december 5.)

12.a) Egyszerre dobunk 5 egyforma dobókockával. Hányféle lehet az eredmény?

b) Ezúttal 3 kockával dobunk és a dobások összegét figyeljük. A 9, a 10 és a 11 közül melyik jön ki a legnagyobb valószínűséggel?

13.a) Döntsük el, hogy egy 101 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemű részhalmaza van-e több.

b) Oldjuk meg a feladatot 100 elemű halmazra is.

14. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét két tizedesjegy pontossággal.

$$\log_3\left(1\cdot\binom{100}{0}+2\cdot\binom{100}{1}+4\cdot\binom{100}{2}+8\cdot\binom{100}{3}+\ldots+2^{100}\cdot\binom{100}{100}\right)$$

15. Legföljebb hány részhalmaza adható meg egy 101 elemű halmaznak úgy, hogy bármelyik kettőnek legyen közös eleme?