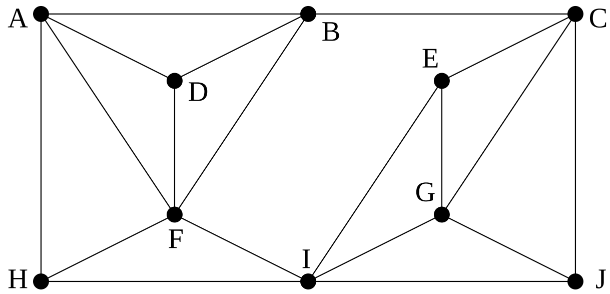
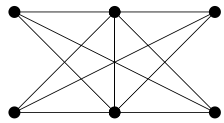


1. Maximálisan hány páronként éldiszjunkt, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az ábrán látható gráfban?
a) B és I b) A és J c) B és H

2. Milyen k értékek esetén igaz, hogy az ábrán látható gráf
a) k-szorosan (pont)összefüggő;
b) k-szorosan élösszefüggő?

---

3. Oldjuk meg az **1.** feladatot az alábbi pontpárokra is.
a) B és G b) A és I c) I és C d) B és C

4. Milyen k értékek esetén k-szorosan összefüggők, illetve k-szorosan élösszefüggők az alábbi gráfok?
a) egy 100 pontú út;
b) egy 100 pontú kör;
c) a K_{10} teljes gráf;
d) a $K_{10,20}$ teljes páros gráf;
e) 

5. Bizonyítsuk be, hogy egy k-szorosan élösszefüggő, n pontú gráfnak legalább $\frac{kn}{2}$ éle van.

6. Legyen $k \leq n-1$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k-szorosan összefüggő.

7. Legyen G egy 100 csúcsú gráf és $x, y \in V(G)$ különböző csúcsok. Tudjuk, hogy bárhogyan választjuk G-ben az $u, v \in V(G)$ csúcsokat úgy, hogy azok x-től és y-tól különbözzenek, G-ben van olyan út, amely x-ből y-ba vezet és nem tartalmazza sem u-t, sem v-t. Mutassuk meg, hogy ekkor x-ből y-ba vezet olyan út, amelynek hossza (éleinek száma) legföljebb 33. (ZH, 2007. március 29.)

---

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráf legalább $\frac{n}{2}$-szeresen összefüggő, akkor van benne Hamilton-kör.

9. Legyen G olyan gráf, melyet úgy kaptunk, hogy egy k-szorosan összefüggő gráfhoz hozzávettünk egy új, legalább k fokú csúcsot. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű gráf, akkor k-szorosan összefüggő.

10. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű síkgráf, akkor nem lehet hatszorosan összefüggő.

11. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e hogy G minden esetben
a) háromszorosan összefüggő?
b) háromszorosan élösszefüggő? (ZH, 2014. április 24.)

12. Legfeljebb hány élet lehet elhagyni a 10 csúcsú teljes gráfból úgy, hogy a maradék gráf négyszeresen élösszefüggő legyen?

13. Mutassunk olyan gráfot, amely kétszeresen, de nem háromszorosan összefüggő, háromszorosan, de nem négyszeresen élösszefüggő és legalább négy él megy ki minden pontból.

14. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k-szorosan összefüggő. (ZH, 2003. április 30.)

15. A legalább négy pontú G gráf bármely két, nem szomszédos pontja között található G-ben három páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G-nek bármely két szomszédos pontja között is található három, páronként éldiszjunkt út. (ZH, 2013. április 25.)

16. Adott egy k-szorosan összefüggő gráf, benne két diszjunkt ponthalmaz $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Bizonyítsuk be, hogy van k pontdiszjunkt út, melynek egyik vége A-beli, másik vége B-beli.

17. Bizonyítsuk be, hogy egy 3-reguláris gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha k-szorosan pontösszefüggő.