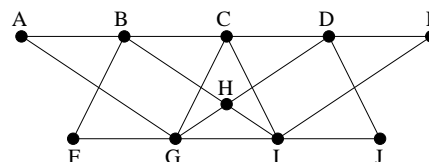
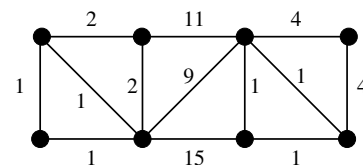


1. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden  $v$  csúcsra  $v$  távolságát a kezdőponttól, azt a csúcsot, ahonnan az eljárás  $v$ -t elérte, valamint a bejáráshoz tartozó BFS-fát).



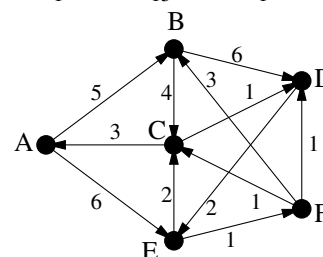
- a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E    b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J

2. Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.



3. a) Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmus segítségével az  $A$  csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát a jobbra látható gráfban és adjunk meg egy  $A$ -ból  $D$ -be vezető legrövidebb utat.

b) Vegyük hozzá a gráfhoz a  $B \rightarrow E$  élt  $t \geq 0$  élsúllyal. A  $t$  mely értékeire változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?

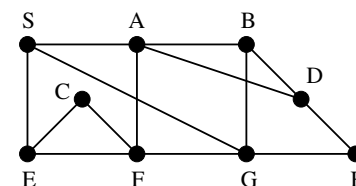


4. Oldjuk meg az 1. feladatot a csúcsok alábbi sorrendjeire is.

- a) J, D, I, C, E, G, H, A, F, B    b) A, B, G, C, H, F, I, D, E, J

5. a) A BFS algoritmus a jobbra látható ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, □, H, □, F, C, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

b) Tartalmazhatja-e a  $\{D, H\}$  élet a gráf egy  $S$ -ből indított (tetszőleges) BFS bejáráshoz tartozó BFS-fája? (ZH, 2015. március 19.)



6. Egy élsúlyozott, összefüggő  $G$  gráfban minden él súlya legfeljebb 100. Tudjuk, hogy  $G$ -ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élet. Mutassuk meg, hogy ekkor  $G$  minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élet.

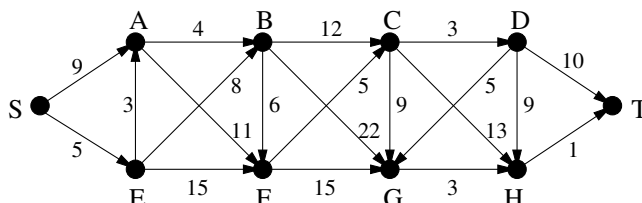
7. Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmus segítségével a 3. feladat gráfjában a  $C$  csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát és adjunk meg egy  $C$ -ből  $B$ -be vezető legrövidebb utat.

8. Legyen  $G$  a 100 csúcsú teljes gráf a  $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$  csúcsalmazon. Minden  $1 \leq i, j \leq 100, i \neq j$  esetén legyen az  $\{i, j\}$  él súlya az  $i$  és  $j$  értékek közül a nagyobb. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya  $G$ -ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

9. A  $G$  összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az  $s$  csúcsából indított BFS algoritmus a  $v$  csúcsot tizenharmadikként éri el (az elsőként elért csúcsnak  $s$ -et tekintjük). Előfordulhat-e, hogy  $v$  távolsága  $s$ -től

- a) 2;    b) 3;    c) 8?

10. Határozzuk meg az  $S$  csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát az alábbi gráfban és adjunk meg egy  $S$ -ből  $T$ -be vezető legrövidebb utat. A feladatot a tanult algoritmusok közül az erre a célra legalkalmasabbal oldjuk meg.



11.a) Legyen  $G$  összefüggő gráf és  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény  $G$  élein. Tegyük fel, hogy  $G$ -ben az  $e$  él egyik végpontja  $v$  és a  $v$ -re illeszkedő minden  $f$  élre  $w(e) \leq w(f)$  teljesül. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza  $e$ -t. (ZH, 2015. március 19.)

b) Legyen  $G$  összefüggő gráf és  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény  $G$  élein. Legyen továbbá  $C$  egy kör  $G$ -ben és  $e$  a  $C$  egy éle. Tegyük fel, hogy a  $C$  kör minden  $f$  élére  $w(f) \leq w(e)$  teljesül. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza  $e$ -t. (ZH, 2015. május 4.)

12\*. Legyen  $G$  összefüggő gráf és  $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény  $G$  élein. Mutassuk meg, hogy  $G$  minden ( $w$ -re nézve) minimális összsúlyú feszítőfája megkapható, mint a Kruskal-algoritmus egyik lehetséges futásának az eredménye.