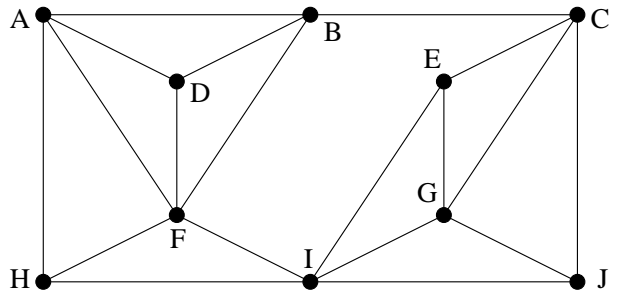


1. Maximálisan hány páronként éldiszjunkt, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az ábrán látható gráfban?

- a) B és I b) A és J c) B és H

2. Milyen k értékek esetén igaz, hogy az ábrán látható gráf

- a) k -szorosán (pont)összefüggő;
b) k -szorosán élösszefüggő?

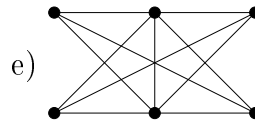


3. Oldjuk meg az 1. feladatot az alábbi pontpárookra is.

- a) B és G b) A és I c) I és C d) B és C

4. Milyen k értékek esetén k -szorosán összefüggők, illetve k -szorosán élösszefüggők az alábbi gráfok?

- a) egy 100 pontú út;
b) egy 100 pontú kör;
c) a K_{10} teljes gráf;
d) a $K_{10,20}$ teljes páros gráf;



5. Bizonyítsuk be, hogy egy k -szorosán élösszefüggő, n pontú gráfnak legalább $\frac{kn}{2}$ éle van.

6. Legyen $k \leq n - 1$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k -szorosán összefüggő.

7. Legyen G egy 100 csúcsú gráf és $x, y \in V(G)$ különböző csúcsok. Tudjuk, hogy bárhogyan választjuk G -ben az $u, v \in V(G)$ csúcsokat úgy, hogy azok x -től és y -től különbözzenek, G -ben van olyan út, amely x -ből y -ba vezet és nem tartalmazza sem u -t, sem v -t. Mutassuk meg, hogy ekkor x -ből y -ba vezet olyan út, amelynek hossza (éleinek száma) legfeljebb 33. (ZH, 2007. március 29.)

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf legalább $\frac{n}{2}$ -szeresen összefüggő, akkor van benne Hamilton-kör.

9. Legyen G olyan gráf, melyet úgy kaptunk, hogy egy k -szorosán összefüggő gráfhoz hozzávettünk egy új, legalább k fokú csúcsot. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű gráf, akkor k -szorosán összefüggő.

10. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű síkgráf, akkor nem lehet hatszorosan összefüggő.

11. Legfeljebb hány élet lehet elhagyni a 10 csúcsú teljes gráfból úgy, hogy a maradék gráf négyszeresen élösszefüggő legyen?

12. Mutassunk olyan gráfot, amely kétszeresen, de nem háromszorosan összefüggő, háromszorosan, de nem négyszeresen élösszefüggő és minden csúcs foka legalább négy.

13. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k -szorosán összefüggő. (ZH, 2003. április 30.)

14. Adott egy k -szorosán összefüggő gráf, benne két diszjunkt ponthalmaz $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_k\}$. Bizonyítsuk be, hogy van k pontfüggetlen út, melynek egyik vége A -beli, másik vége B -beli.

15. Bizonyítsuk be, hogy egy 3-reguláris gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha k -szorosán pontösszefüggő.