Feladatok

Elemi leszámlálási feladatok

1.1.1. Hány különböző autó–rendszám készíthető (két betűből és négy számjegyből)?

1.1.2. Hány pontosan hatjegyű szám van a tízes számrendszerben,

a) ha valódi hatjegyű szám nem kezdődhet 0–val?

b) És ha még azt is megköveteljük, hogy ne legyen 10–zel osztható?

1.1.3. Hányféleképpen festhetjük egy n–emeletes ház szintjeit fehérre, drappra és barnára, ha szomszédos szintek nem lehetnek egyszínűek?

1.1.4. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ.

a) Hányféleképpen tehetik ezt?

b) És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?

1.1.5. Egy versenyen 57–en indulnak; az újságok az első hat helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?

1.1.6. n különböző virágot k különböző vázába hányféleképpen oszthatunk el? (Egyes vázák üresek is maradhatnak.)

1.1.7. Hány darab $m \times n$–es $0-1$-mátrix van? (Elemeik tehát 0–k vagy 1–esek.)

1.1.8. Hány különböző számsorozatot kaphatunk, ha tízszer dobunk

a) dobókockával

b) pénzdarabbal?

1.1.9. Hányan vannak

a) egy n–elemű halmaz összes részhalmazai?

b) az n hosszúságú $0-1$–sorozatok?

c) Miért egyenlő a fenti két eredmény? Mutass kölcsönösen egyértelmű természetes megfeleltetést!

1.1.10. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 8 bástyát, hogy semelyik kettő se üsse egymást?

1.1.11. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben az első három jegy azonos az utolsó hárommal?

Dobjuk ki a rosszat!

1.1.12. Hány természetes szám teljesíti az $57 \leq n \leq 113$ feltételt?

1.1.13. Hány hatjegyű természetes szám van? (Ami 0–val kezdődik, az nem hatjegyű.)

1.1.14. Kockával tízszer dobva hány olyan sorozatot kaphatunk, amiben van legalább egy hatos?

1.1.15. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt, jegyzőt és pénztárost választ. A népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni. Hányféle lehet a vezetőség?

… és ha többször is megszámoltuk?

1.1.16. Kilenc egyforma cédula közül négyre egy–egy **A**–t írunk piros, kék, zöld illetve fekete tintával; a többin a **B,C,D,E** és **F** betűk találhatók feketével.

a) Hányféleképpen rakhatjuk a cédulákat sorba egymás után?

b) Szilárd, szegény, színvak; egyáltalán nem tudja megkülönböztetni a színeket. Hány olyan sorrendje van a céduláknak, amikor ő csak azt látja, hogy ABC szerint sorban vannak? És hány olyan, amikor csak a **BACADAEAF** sorrendet látja?

c) Hány sorrendet tud megkülönböztetni Szilárd?

1.1.17. Húsz egyforma cédula közül nyolcra „1”–et, ötre „2”–t és hétre „3”–at írtunk (mindegyiket feketével!). Hányféleképpen rakhatjuk sorba őket?

1.1.18. Hányféle anagramma (a betűk sorrendjének megváltoztatásával keletkező, esetleg értelmetlen szó) készíthető a **MATEMATIKA** betűiből?

Gyakorló feladatok

1.1.19. A kanadai irányítószámok $XnXnXn$ alakúak, ahol az X–ek egy–egy (esetleg különböző) betűt, az n–ek egy–egy számjegyet jelentenek. Hány ilyen irányítószám létezhet?

1.1.20. Az iskolai atlétika versenyre magasugrásból, távolugrásból, 60 ill. 400 méteres futásból és kislabda dobásból kell egy osztály 27 tanulója közül kiállítani egyet–egyet. Ugyanaz az ember több (akár az összes) sportágban is indulhat. Hányféle lehet a nevezési lista?

1.1.21. n fiút és n lányt egy sorba akarunk állítani úgy, hogy mindig felváltva egy lány – egy fiú következzen. Hányféleképpen tehetjük ezt?

1.1.22. Hányféleképpen küldhetünk el egy nyáron 29 különböző képeslapot négy ismerősünknek? (Megtehetjük, hogy valaki egyet se kap; akár mindet küldhetjük ugyanannak.)

1.1.23. Hány húsztagú *szimmetrikus* $0-1$–sorozat van? (második fele az első tükörképe)

1.1.24. A vitorlásbajnokságon 37 hajó indult. Fakezű Jancsié eddig mindig utolsónak ért célba; régi vágya, hogy előbbre rukkoljon. A verseny után látjuk, amint széles mosollyal megy hazafelé: sikerült! Hányféle lehetett a befutási sorrend? (Még az sem kizárt, hogy — óriási szerencsével — dobogóra került vagy akár nyert is!)

1.1.25. Egy Forma I–es csapatról az a hír járja, hogy első számú versenyzőjüket, **X**–et a másik, **Y** nem előzheti meg, ha **X** az *első* helyen van; sőt, ha ő vezet és **X** felzárkózik mögéje, köteles előre engedni. Más helyezésekért — ha nem ők vannak az élen — szabad egymással csatázniuk. Hányféle lehet a sorrend a dobogón (első három hely) egy olyan futamon, ahol huszonnyolcan indulnak?

1.1.26. Tíz egyforma csokit, hat egyforma rágógumit és kilenc egyforma jégkrémet osztunk ki 25 gyerek között úgy, hogy mindenki pontosan egyvalamit kapjon. Hányféleképpen tehetjük ezt?

Skatulyák, átlagok — hányszor számol, aki nem rest?

1.1.27. Hat pár fekete és ugyanannyi kék zoknid — amelyeket, sajnos, *nem* raktál össze párosával — összekeveredett a fiókban. Teljes sötétségben hány darabot kell elővenned a 24–ből, hogy biztosan legyen köztük egy összeillő pár?

1.1.28. (folytatás) És ha egy *kék* párra van szükséged?

1.1.29. Ha egy mátrix minden sorában az elemek átlaga legalább 100, akkor van olyan *oszlop* is, ahol az átlag szintén legalább 100.

1.1.30. Egy összejövetelen tízen vettek részt. Érkezéskor

négy	másikkal fogott kezet 5	ember
öt	másikkal fogott kezet 2	ember
hat	másikkal fogott kezet 3	ember

Hány kézfogás történt összesen?

1.1.31. Hány mérkőzést játszanak egy n résztvevős kieséses ping–pong versenyen?

1.1.32. Egy négyzet alakú 3×3-as táblázat mind a 9 mezőjébe beírjuk a $7, 8, 9$ számok valamelyikét. Kitölthető-e a táblázat úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban és a két átlóban is csupa különböző eredményt adjon a beírt számok összege?

1.1.33. Egy gimnáziumi osztályból 18-an járnak a matek, kémia és irodalom szakkörből legalább egyikre. A kémia szakkörösök száma 8, az irodalom szakkörösöké 12. Eggyel több jár matekra, mint ahányan mindhárom szakkörre járnak. Hányan járnak matekra?

1.1.34. Bizonyítsuk be, hogy egy 100 fős társaságban mindig van legalább 9, aki ugyanabban a hónapban született!

Binomiális együtthatók

1.1.35. Hányféleképpen lehet sorba rakni két 1–est és $n-2$ db. 0–t?

1.1.36. Hány olyan n-elemű $0-1$ sorozat van, mely egy adott sorozattól pontosan két pozícióban különbözik?

1.1.37. Hány olyan n-elemű $0-1$ sorozat van, melyben pontosan 2 db egyes van és mindkét egyesnél közvetlenül előtte is, utána is zérus áll?

1.1.38. Ugyanez a kérdés a „közvetlenül” szó nélkül.

1.1.39. * Határozzuk meg az olyan, k db egyesből és l db zérusból álló sorozatok számát, melyben nincsenek szomszédos zérusok!

1.1.40. Egy körmérkőzéses bajnokságon n csapat indul. Mindegyik mindegyikkel játszik egyszer egyikük, egyszer másikuk pályáján. Hány meccsből áll a bajnokság?

1.1.41. Ugyanez a kérdés, ha minden mérkőzést a Népstadionban rendeznek (a nagy érdeklődés miatt), és így persze mindenki mindenkivel csak egyszer játszik.

1.1.42. Egy n tagú társaságban mindenki mindenkit kézfogással üdvözölt. Hány kézszorítás történt összesen?

1.1.43. Mi köze egymáshoz az előző négy feladatnak?

1.1.44. Módosítsuk a LOTTÓ szabályokat! Tegyük fel, hogy a 90 számból hármat húznak ki. Hány szelvény kell a biztos telitalálathoz?

1.1.45. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k)$ minden $0 \le k \le n$-re!

1.1.46. Adjunk hasonló formulát $\binom{n}{3}$-ra is!

1.1.47. Az $\binom{x}{y}$ jelölést használva írd fel, hány olyan k–elemű része van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak,

a) amiben az n benne van?

b) És amiben nincs benne?

1.1.48. Hányféleképpen olvashatod ki a MATEMATIKA szót a következő ábra bal felső sarkából a jobb alsóig haladva?

M A T E M A T
A T E M A T I
T E M A T I K
E M A T I K A

1.1.49. Egy négyzetrács $(0,0)$ pontjából rácsegyenesek mentén jobbra vagy felfelé lépve hányféleképpen juthatsz el az (u, v) pontba? $(u, v \ge 0)$

1.1.50. Legyen p prím és $1 \le k < p$. Mutassuk meg, hogy $\binom{p}{k}$ osztható p-vel!

1.1.51. Mutassuk meg, hogy ez nem feltétlenül teljesül, ha p összetett szám!

1.1.52. * Sőt, mutassuk meg hogy minden m összetett számhoz van olyan $1 \le k < m$, hogy $\binom{m}{k}$ nem osztható m-mel!

1.1.53. Mutasd meg, hogy minden nem-üres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú része van, ahány páratlan!

1.1.54. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = ?$

1.1.55. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

1.1.56. $n\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} + k\binom{n}{k}$.

1.1.57. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

1.1.58. $\displaystyle\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$.

1.1.59. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n\le m}\binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.

1.1.60. Ennek felhasználásával adjunk formulát $\sum n^2$ -re!

1.1.61. Mennyi $\sum_k \binom{n}{2k}$?

1.1.62. Egy évfolyam 50 lány és 30 fiú hallgatója öttagú küldöttséget választ, éspedig három lányt és két fiút. Hányféleképpen tehetik ezt?

1.1.63. (folytatás) Ancsa és Berci éppen haragban vannak; nem akarnak együtt bekerülni. Hányféle lehet a delegáció?

1.1.64. Egy 8 fiúból és 5 lányból álló társaságból hányféleképp választhatunk 6 főt úgy, hogy legalább 2 lány legyen köztük?

1.1.65. A bridzsben hányféleképp kaphatok az 52 lapos kártyacsomagból 13 lapot úgy, hogy

a) 3 ászt,

b) 4 kőrt,

c) 3 ászt és 4 kőrt kapok?

1.1.66. Hányféleképp lehet 6 elemet két 3-elemű csoportra osztani? És általában $2k$ elemet két k-eleműre?

1.1.67. Hányféleképp lehet 7 elemet egy 4-elemű és egy 3-elemű csoportba osztani?

1.1.68. Hány olyan, 1024-nél kisebb pozitív egész szám van, mely 3 db különböző 2-hatvány összegeként áll elő?

1.1.69. * Egy n-elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy bármely kettő messe egymást?

Ha egy elem többször is szerepelhet

1.1.70. Mutass kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést

a) az 1 és 2 számjegyekből képezhető öttagú monoton növő sorozatok és az 1,2,3,4,5 és 6 jegyekből álló, ugyancsak öttagú *szigorúan* monoton növő sorozatok között!

b) az n tagú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(1 \leq a_i \leq k)$ monoton növő és az ugyancsak n tagú $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(1 \leq b_i \leq k+n-1)$ *szigorúan* monoton növő sorozatok között!

c) Mutasd meg, hogy a b) alattiakból $\binom{n+k-1}{n}$ db. van!

1.1.71. Melyik készletben van több dominó és miért:

a) 0–tól 8–ig számozva, duplák is vannak;

b) 0–tól 9–ig számozva, duplák nincsenek.

1.1.72. Egy gyereknek 10 rágógumit akarsz venni; golyó, Donald és lapos van. Hányféleképp válogathatsz?

1.1.73. Ötfajta képeslapot árulnak. Hányféleképp vehetünk 12 -t?

Vegyes feladatok

1.1.74. A sakktáblán hány 1–1 szomszédos világos és sötét négyzetből álló téglalap található?

1.1.75. 5 könyvünk van analízisről, 6 diszkrét matematikáról és 8 a számítógépekről. Hányféleképp helyezhetjük el őket a polcunkon, ha az egyforma témájúaknak egymás mellett kell lenniük?

1.1.76. A fogorvosra váró 5 beteg hányféleképp választhat 1–1 olvasnivalót a várószobában lévő 10 különböző folyóiratból, ha egy folyóiratot csak egy beteg választhat?

1.1.77. Bergengóciába érve beváltottuk forintjainkat: $3n+1$ darab helyi pénzérmét kaptunk: n db 1-picunkásat, továbbá 1–1 darab $2, 4, 8, \ldots, 2^{2n+1}$-fityingeset. A fitying $n+1$ picunkát ér. Hányféle összeget tudunk kifizetni pontosan n darab pénzérmét használva?

1.1.78. A liftbe hatan szálltak be a földszinten. A lift az 1., 2., 3. és 4. emeleten egyaránt megáll. Hányféleképp szállhatnak ki az utasok?

1.1.79. * A liftben ezenkívül elgurult a földszintről való induláskor 6 db egyforma üveggolyó. Mind kigurult valamelyik emeleten való megálláskor. Ez hányféleképp történhetett?

1.1.80. Legyen j rögzített pozitív egész. Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív n egész számhoz találhatóak olyan $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_j$ egészek, hogy $n = \binom{a_1}{1} + \binom{a_2}{2} + \ldots + \binom{a_j}{j}$ teljesüljön!

1.1.81. * Azt is mutassuk meg, hogy n egyértelműen határozza meg az a_i számokat!

1.1.82. Hányféleképp választhat egy k fiúból és n lányból álló klub elnököt, alelnököt és titkárt, ha az elnök és az alelnök nem lehet egynemű?

1.1.83. Hányféleképp jelölhetünk meg a lottószelvényen található 90 szám közül 5-öt úgy, hogy páros legyen

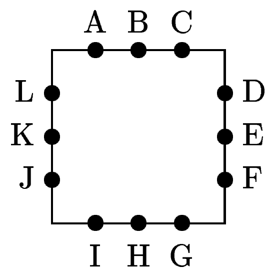
a) az 5 szám szorzata?

b) az 5 szám összege?

1.1.84. Egy budapesti, egy vidéki és egy külföldi barátunknak szeretnénk 2-2 képeslapot küldeni úgy, hogy egyik se kapjon 2 egyformát. Hányféleképp tehető ez meg, ha a boltban összesen 5-féle lap kapható?

1.1.85. Hányféleképp juthatunk el a 3-dimenziós koordinátarendszer $(0,0,0)$ pontjából a (k,l,m) pontjába ($k,l,m \geq 0$ egészek), ha minden lépésben valamely tengellyel párhuzamosan lépünk egy egységnyit pozitív irányban?

1.1.86. Hány különböző, nem elfajult háromszög alkotható az ábrán megjelölt pontokból, mint csúcsokból? (Nem elfajult egy háromszög, ha csúcsai nem esnek egy egyenesbe.)



1.1 Ábra

1.1.87. Egy 14 mérkőzéses TOTÓ első négy mérkőzéséről tudjuk, hogy nem végződhet döntetlennel. Legalább hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen közöttük telitalálatos?

1.1.88. Hány olyan n hosszú $0-1$ sorozat van, amelyben ugyanannyi a 0-s, mint az 1-es?

1.1.89. Legyen n páros szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}.$$

1.1.90. Hány olyan hétjegyű telefonszám készíthető, melyben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám? (Figyelem a 0 és az 1 nem prímszámok!)

1.1.91. Fotózáshoz szeretnénk két n hosszúságú sorba felállítani $2n$ különböző magasságú embert úgy, hogy az első sor egyetlen tagja se takarja azt, aki a második sorban mögötte áll (vagyis a második sor minden tagja magasabb legyen az épp előtte állónál). Hányféleképp lehetséges ez?

1.1.92. Egy városban 10000 kerékpár van 1-től 10000-ig megszámozva. Mi a valószínűsége, hogy először olyan kerékpárt lássunk, amelyen nem szerepel a 8-as?

1.1.93. Rakjuk ki a FESTÉK szót kivágott betűkből, majd keverjük össze a betűket és véletlenszerűen egyenként válasszunk ki közülük 4-et és helyezzük el ezeket a kihúzás sorrendjében. Mi a valószínűsége, hogy épp a FEST szót kapjuk? És mi a helyzet a TETEJE és az ETET szavak esetén?

1.1.94. Hányféleképp fedhető le a $2 \times k$-as téglalap k db 2×1-es dominóval? (rekurzióval próbálkozzunk!)

Gráfelmélet

2.1.1. Van–e olyan (legalább két pontú) gráf, amiben minden pont foka különböző?

2.1.2. Van-e olyan egyszerű gráf, melyben a pontok foka rendre

a) 1,2,2,3,3,3

b) 1,1,2,2,3,4,4

c) 5,5,5,6,6,6,7,7,7

d) 1,2,2,3,4,4,5,6,6

e) 1,1,3,3,3,3,5,6,8,9

f) 2,3,3,4,5,6,7

g) 1,3,3,4,5,6,6?

2.1.3. Ahol nemleges volt a válasz, döntsük el, hogy többszörös és hurokéleket is tartalmazó gráfok körében található-e megoldás!

2.1.4. Tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

2.1.5. Határozzuk meg az összes olyan, páronként nem izomorf egyszerű gráfot, melyre

a) v = 4, e = 5

b) v = 5, e = 3

c) v = 5, e = 7

d) v = 5, e = 8

e) v = 5, minden pont foka ≥ 3

2.1.6. Az $n+1$ pontú csillag egy n-edfokú és n elsőfokú pontból álló egyszerű gráf. Határozzuk meg, hány páronként nem izomorf

a) részgráfja, ill.

b) feszített részgráfja van!

2.1.7. Mutasd meg, hogy ha egy $2n$ pontú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő!

2.1.8. (folytatás)Igaz marad–e az előző állítás, ha $n-1$ fokú pontokat is megengedünk?

2.1.9. Igaz–e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggő?

Gyakorló feladatok

2.1.10. Igaz–e, hogy minden összefüggő gráf tartalmaz *körmentes* összefüggő feszítő részgráfot?

2.1.11. Melyek azok a gráfok, amelyekben bármely két élnek van közös pontja?

2.1.12. Ha egy összefüggő gráf minden pontja másodfokú, akkor a gráf egyetlen körből áll.

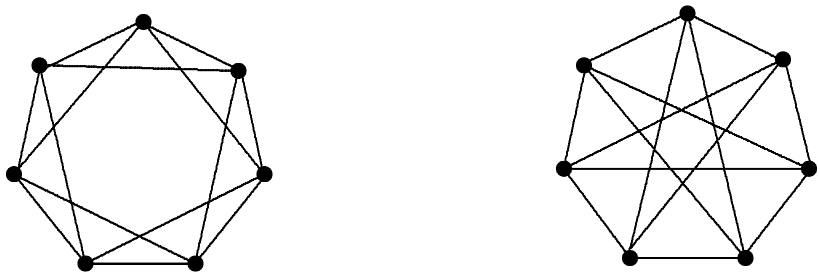
2.1.13. Milyen komponensekből állhat egy gráf, ha minden pontjának foka legfeljebb 2 ?

2.1.14. Legyen $A \subset V(G)$ és jelöljük k-val a gráf azon éleinek számát, melyek egyik végpontja A-ban van, a másik nem. Mutassuk meg, hogy k akkor és csak akkor páros, ha A-ban a páratlan fokú pontok száma páros!

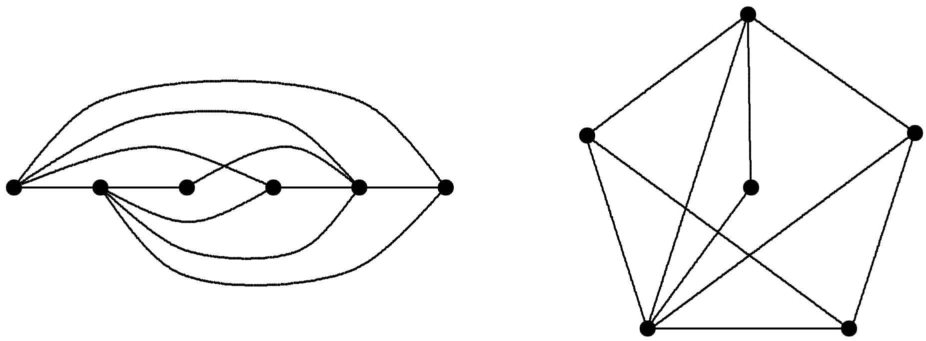
2.1.15. Jellemezzük azokat a gráfokat, melyekben minden kör páratlan hosszúságú!

2.1.16. Izomorfak-e az 2.1. ábra illetve a 2.2. ábra gráfjai?

2.1.17. Adjunk példát olyan izomorf gráfokra, melyek ponthalmazai között az 1–1 értelmű megfeleltetés csak egyféleképp készíthető el, és olyanokra is, ahol nem.

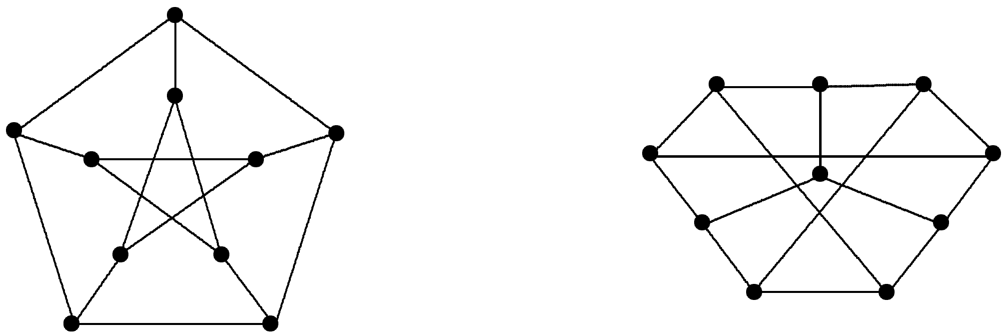


2.1. Ábra



2.2. Ábra

2.1.18. Egy G gráf pontjai legyenek egy 5-elemű halmaz elemeiből képezhető párok és két pont akkor és csak akkor legyen szomszédos a gráfban, ha a megfelelő párok diszjunktak. A 2.3. ábra két gráfja közül melyik izomorf G-vel?



2.3. Ábra

2.1.19. Rajzoljunk a komplementerével izomorf

a) 5-pontú, ill.

b) 6-pontú gráfot!

2.1.20. Hány egymással nem izomorf 60 pontú és 1768 élű egyszerű gráf létezik?

2.1.21. Bizonyítsuk be, hogy egy elvágó él végpontja vagy elsőfokú, vagy elvágó pont! Igaz-e, hogy minden elvágó ponthoz illeszkedik legalább egy elvágó él?

2.1.22. Egy él mindkét végpontja elvágó pont. Biztos-e, hogy ő elvágó él?

2.1.23. Egy gráfban minden pont foka 3. Bizonyítsuk be, hogy minden elvágó pont legalább egy elvágó élhez illeszkedik!

2.1.24. Lehet-e egy pont a gráfban is és a komplementerében is elvágó?

2.1.25. Legyen a G egyszerű gráfban minden pont foka legalább k. Mutassuk meg, hogy G-ben van egy legalább k hosszúságú út!

2.1.26. (folytatás) Bizonyítsuk be, hogy létezik egy legalább $k+1$ hosszú kör is!

2.1.27. Legyen a G egyszerű páros gráfban minden pont foka legalább 4. Mutassuk meg, hogy G-ben van egy legalább 8 hosszúságú út!

2.1.28. Legyen G összefüggő és $k < v(G)$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van pontosan k-pontú összefüggő részgráfja!

2.1.29. Igaz-e, hogy minden élt tartalmaz legalább egy vágás?

2.1.30. Egy csillag (ld. a 2.1.6. feladatot) élei vágást alkotnak?

2.1.31. Mutassunk példát két olyan vágásra, tehát (tartalmazásra nézve) minimális elvágó élrendszerre, melyek élszáma különböző, tehát melyek közül legalább az egyik (méretre nézve) nem minimális!

2.1.32. Egy G gráf $L(G)$ élgráfját úgy definiáljuk, hogy $L(G)$ pontjai G éleinek felelnek meg és két pont akkor van összekötve $L(G)$-ben, ha a megfelelő éleknek G-ben van közös végpontjuk. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan G gráf, melynek élgráfjában feszített részgráfként megjelenne a $K_{1,3}$ részgráf!

2.1.33. Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő k–reguláris páros gráf bármely pontját elhagyva a gráf összefüggő marad!

2.1.34. Adott egy k pozitív egész szám. Mely n értékekre létezik n pontú k–reguláris egyszerű gráf?

2.1.35. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban legalább $n+1$ él van, akkor van a gráfban egy legalább 3 fokú pont!

Fák

2.2.1. Rajzold fel az összes 3, 4 ill. 5 pontú fát! (Az izomorfakat — amelyek a pontok cseréjével egymásba mennek — csak egyszer.)

2.2.2. Hány olyan páronként nem izomorf 8-pontú fa van, mely pontosan 2 db harmadfokú pontot tartalmaz?

2.2.3. Hány olyan páronként nem izomorf k-pontú fa van, mely tartalmaz $(k-3)$-adfokú pontot?

2.2.4. Igaz–e, hogy minden fában van pontosan elsőfokú pont?

2.2.5. Igaz–e, hogy n pontú, legalább n élű gráfban van kör?

2.2.6. Igaz–e, hogy fában mindig van legalább két elsőfokú pont?

2.2.7. Legyen Δ egy fában a maximális fokszám. Bizonyítsuk be, hogy a fa legalább Δ darab elsőfokú pontot tartalmaz!

2.2.8. Húzzál be egy fába még egy élt! Bizonyítsd be, hogy így mindig pontosan egy kör keletkezik!

2.2.9. Bizonyítsd be, hogy összefüggő gráfból mindig elhagyható egy pont (a belőle induló élekkel együtt) úgy, hogy összefüggő gráf maradjon!

2.2.10. Mely összefüggő gráfokból radírozhatunk ki egy *élet* (de pontokat nem!), hogy az összefüggőség ne szűnjön meg?

2.2.11. Igazold, hogy bármely, legalább öt pontú gráfban vagy a komplementerében van kör!

2.2.12. Bizonyítsd be, hogy bármely n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van!

2.2.13. Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két pontú egyszerű gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két pontját pontosan egy út köti össze!

2.2.14. Legalább hány éle van egy olyan gráfnak, amiben nincs elvágó pont!

2.2.15. Jellemezzük azokat az éleket, melyek minden feszítő fában benne vannak, és azokat, melyek egyikben sincsenek benne!

2.2.16. Mutassuk meg, hogy minden, vágást nem tartalmazó élhalmaz kiegészíthető egy kifeszítő erdő komplementerévé!

2.2.17. Legyen C egy gráf köre és e, f két különböző él C-ben. Bizonyítsuk be, hogy van olyan vágás, melynek épp e és f a két C-vel közös éle!

2.2.18. Az n hosszúságú $0-1$ sorozatok legyenek egy gráf pontjai, két pont akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a két sorozat pontosan egy koordinátájában tér el. Legalább hány élet kell ebből a gráfból elhagyni, hogy körmentessé váljon?

2.2.19. Egy 4-reguláris, összefüggő gráfból töröljük ki egy fa éleit. Bizonyítsuk be, hogy a maradék gráf legalább két kört tartalmaz!

2.2.20. Egy egyszerű gráf minden pontja legalább k-adfokú. Bizonyítsuk be, hogy ennek tetszőleges $k+1$ pontú fa részgráfja!

2.2.21. Hány éle van egy n pontú, egyszerű gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

2.2.22. Mely fák izomorfak saját komplementerükkel?

2.2.23. Mely fa Prüfer–kódja a 447741 sorozat?

2.2.24. Egy n címkézett pontú fának hány olyan részgráfja van, mely legfeljebb 3 komponensből áll? (Egy esetleges izolált pont is komponens!)

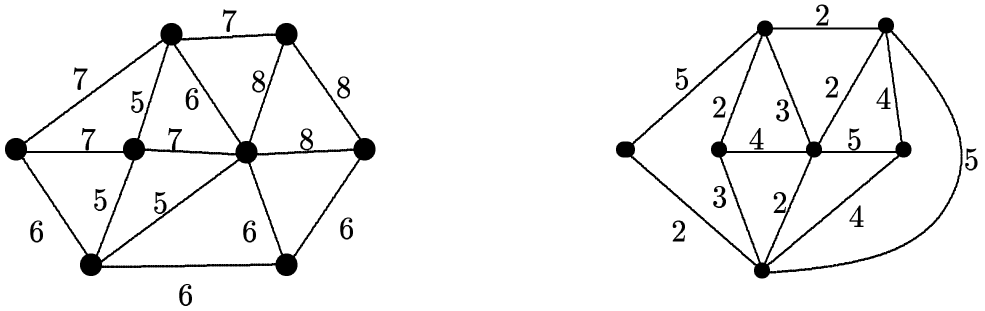
2.2.25. Egy F fa Prüfer–kódja csupa különböző számokból áll. Hogyan jellemezhetjük F-et?

2.2.26. Egy F fa Prüfer–kódja csupa egyforma számokból áll. Hány élből áll a leghosszabb út?

2.2.27. Legyen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olyan pozitív egészek sorozata, melyek összege $2n-2$. Mutassuk meg, hogy van olyan n-pontú fa, melynek épp ezek a fokszámai!

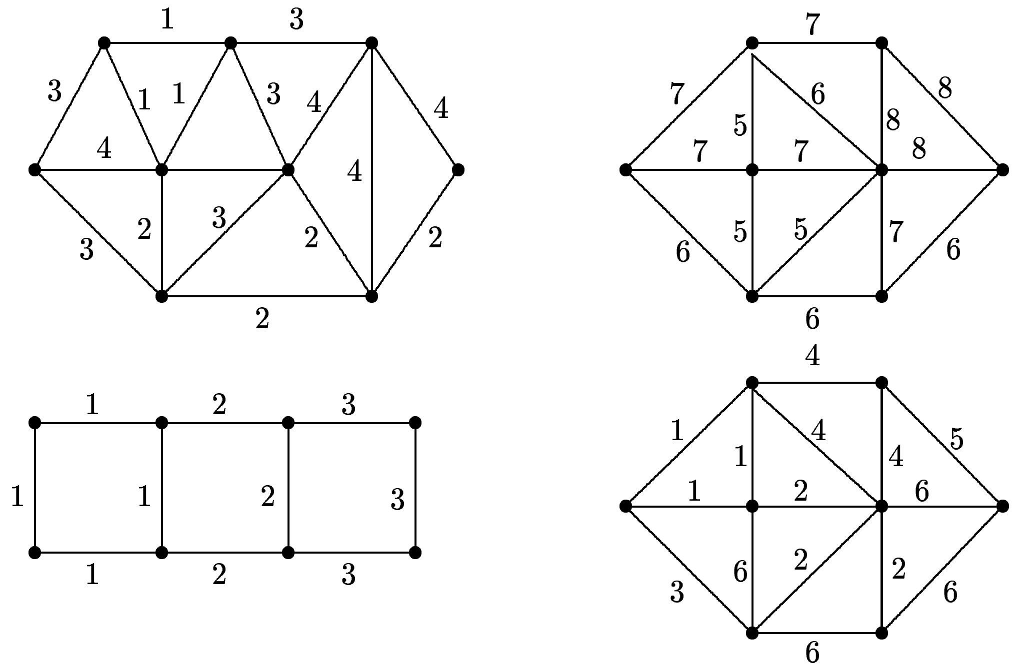
2.2.28. Keressünk **maximális** összsúlyú fát a 2.4. ábra első gráfjában!

2.2.29. Hány különböző minimális összsúlyú fa van a 2.4. ábra második gráfjában?



2.4. Ábra

2.2.30. Keressünk egy minimális összsúlyú feszítőfát a 2.5. ábra gráfjaiban és azt is határozzuk meg, hogy hány különböző minimális összsúlyú fa van!



2.5. Ábra

2.2.31. Tartalmazhatja-e egy kör legolcsóbb élét egy maximális összsúlyú fa?

2.2.32. Lehetségesek-e az alábbiak?

a) Egy összefüggő gráfban csak egyetlen legolcsóbb él van és az nem szerepel a minimális összsúlyú fában.

b) Egy összefüggő gráfban 4 darab legdrágább él van és mindegyik szerepel mindegyik minimális összsúlyú fában.

c) Egy összefüggő gráfban 4 darab legdrágább él van és mindegyik szerepel valamely, de nem minden minimális összsúlyú fában.

2.2.33. Legyen Q vágás egy összefüggő G gráfban. A $G - Q$ két komponensében F_1 , ill. F_2 egy-egy minimális összsúlyú kifeszítő fa. Legyen e a Q-t alkotó élek közül a legkisebb súlyú. Mi mondható $F_1 \cup F_2 \cup \{e\}$-ről?

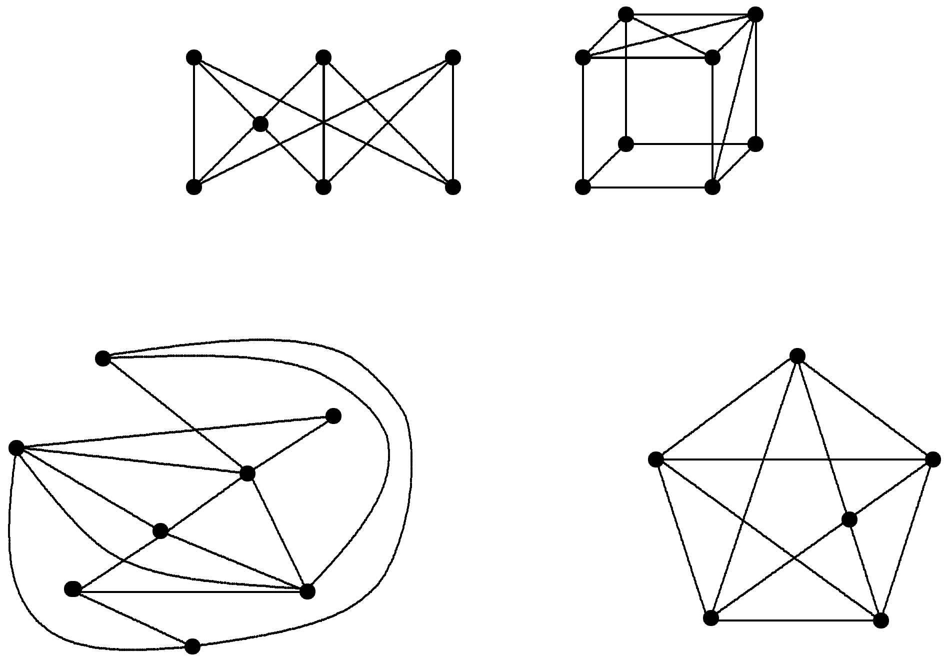
2.2.34. Egy $n \times n$-es mátrixot sakktáblának képzelünk és el kell helyeznünk rajta n db „bástyát” úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást. Minden ilyen konfigurációhoz hozzárendelünk egy összsúlyt: azon n darab mátrix–elem összegét, melyeken a „bástyák” állnak.

Mutassuk meg, hogy általában a maximális összsúlyú konfiguráció nem kapható meg egy mohó jellegű algoritmussal!

2.2.35. Legyenek a gráf $e_1, e_2, \ldots$ élei egymástól függetlenül rendre $p_1, p_2, \ldots$ valószínűséggel meghibásodó telefonvonalak. A kifeszítő fák közül keressük meg azt, melynek a legnagyobb a megbízhatósága (tehát melyre maximális annak a valószínűsége, hogy egyik él sem hibásodik meg).

Síkbarajzolható gráfok, dualitás

2.3.1. Síkbarajzolhatóak-e a 2.6. ábrán látható gráfok? (Csak a karikák a gráf pontjai!)



2.6. Ábra

2.3.2. Egy hatelemű halmaz kételemű részhalmazai legyenek egy gráf pontjai. Két pont akkor legyen összekötve egy éllel, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak (metszetük üres). Síkbarajzolható-e ez a gráf?

2.3.3. A G_n gráf pontjai feleljenek meg egy $2n$-elemű halmaz $n-1$ elemű részhalmazainak. Két pont akkor legyen összekötve egy éllel, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Mely n-ekre lesz G_n síkbarajzolható?

2.3.4. Bizonyítsuk be, hogy egy 4–reguláris, egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!

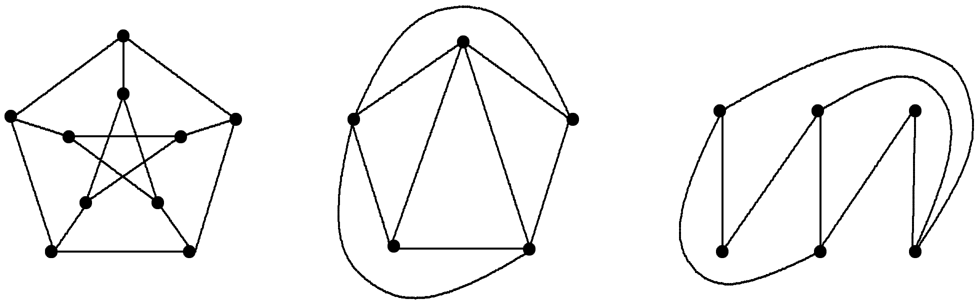
2.3.5. Bizonyítsuk be, hogy ha a gömbre rajzolt, t darab tartományból álló térkép gráfjának e éle van és a gráf 3-reguláris, akkor $6t = 2e + 12$!

2.3.6. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű, síkbarajzolható, három hosszú kört nem tartalmazó gráfnak legalább 3 pontja van, akkor $e \leq 2n - 4$!

2.3.7. Az n-pontú, e élű, síkbarajzolható gráf bármely 5 élét kiválasztva létezik G-nek olyan feszítőfája, amely mind az 5 élet tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $e \leq \frac{3}{2}n - 3$!

2.3.8. Adjunk felső becslést egy síkbarajzolható gráf éleinek számára, ha minden körének hossza legalább k (ahol $k \geq 3$ rögzített egész)!

2.3.9. Mutassuk meg, hogy a két Kuratowski-gráf felrajzolható a tóruszra!



2.7. Ábra

2.3.10. Síkbarajzolható-e az 2.7. ábrán látható első gráf, az ú.n. Petersen-gráf?

2.3.11. Rajzoljuk le a síkban az 2.7. ábra második és harmadik gráfját úgy, hogy minden él egyenes szakasz legyen!

2.3.12. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6.

2.3.13. (folyt.) Tegyük fel, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban a minimális fokszám 5. Mutassuk meg, hogy ekkor legalább 12 db ötödfokú pont van!

2.3.14. (folyt.) Éles-e a fenti becslés, vagyis van-e olyan egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben pontosan 12 db ötödfokú pont van és nincs kisebb fokú pont?

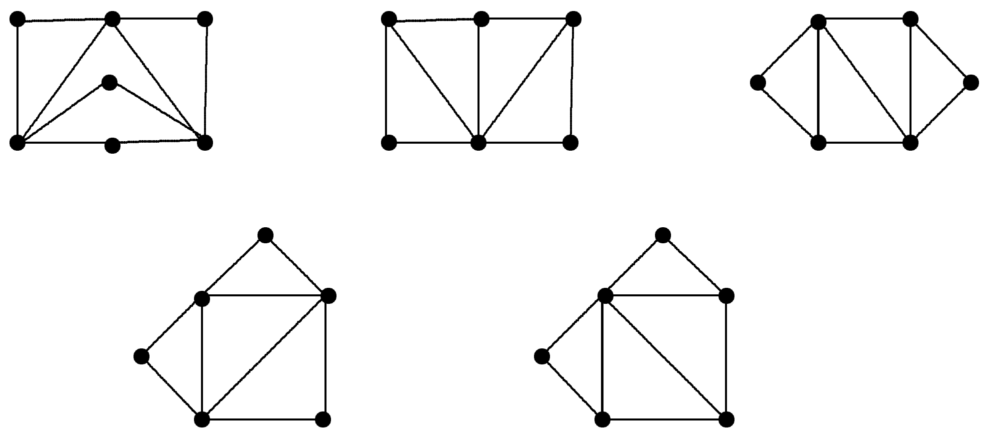
2.3.15. Legyen G pontjainak a száma legfeljebb 7. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere közül legalább az egyik síkbarajzolható!

2.3.16. Szabályos ötszögekből és hatszögekből akarunk labdát készíteni: minden ötszöget 5 hatszög határol, minden hatszöget 3-3 ötszög és hatszög (felváltva). Meg lehet-e csinálni, és ha igen, egyértelműen meghatározható-e ebből az ötszögek és a hatszögek száma?

2.3.17. Hasonló kérdés szabályos háromszögekkel és négyzetekkel (minden négyzetet 4 háromszög, minden háromszöget 2 négyzet és 1 háromszög határoljon).

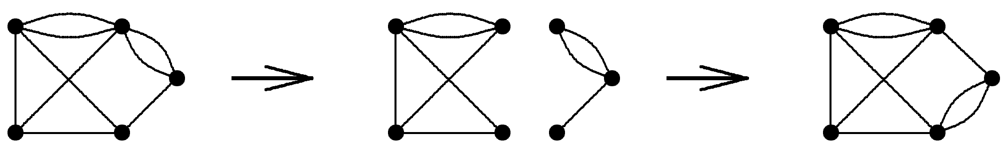
A következő feladatokhoz: két gráf gyengén izomorf, ha élhalmazaik között létesíthető olyan, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mely kört körbe visz.

2.3.18. Keressünk izomorf és gyengén izomorf párokat a 2.8. ábra gráfjai között!



2.8. Ábra

2.3.19. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, x és y két nem elvágó pontja, de $G - \{x, y\}$ két komponensre esik szét. Ragasszuk újra össze ezt a két komponenst, de előtte az egyiket fordítsuk át (2.9. ábra). Mutassuk meg, hogy az új gráf gyengén izomorf a régivel!



2.9. Ábra

2.3.20. Gyengén izomorfak-e a 2.10. ábra gráfjai?

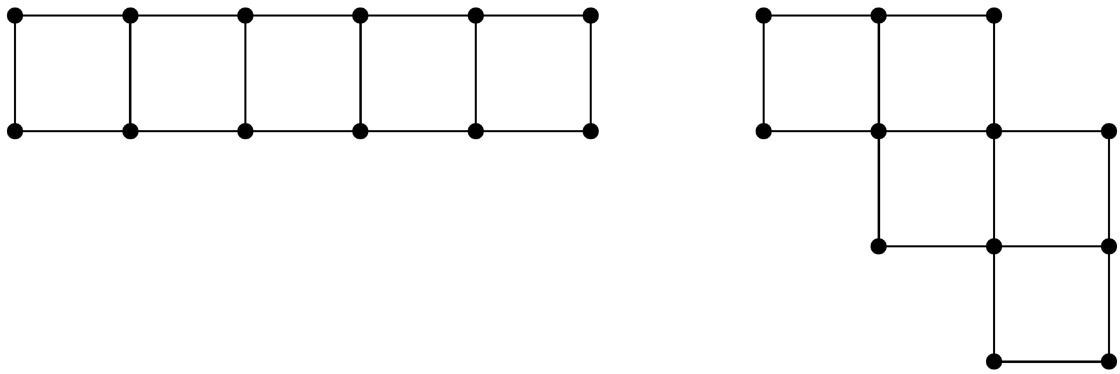
2.3.21. Készítsük el az 2.7. ábra 2. és 3. gráfjának a duálisát!

2.3.22. Mutassuk meg, hogy a Kuratowski-gráfoknak nem lehet duálisa!

2.3.23. Keressünk olyan gráfokat, melyek izomorfak a duálisokkal!

2.3.24. G síkbarajzolható és van Euler–köre. Bizonyítsuk be, hogy G^* páros gráf!

2.3.25. Adjunk példát olyan igaz gráfelméleti állításra, mely „dualizálva” hamissá válik!



2.10. Ábra

A következő feladatokhoz: A G gráf $e = \{u, v\}$ élének összehúzásán azt értjük, hogy az u és v pontokat azonosítjuk, az így hurokéllé vált e élt elhagyjuk, és minden más olyan élt, mely u-ba, vagy v-be vezetett, az új pontba vezetjük. A keletkező gráfot G/e-vel jelöljük.

2.3.26. Mutassuk meg, hogy $(G/e)/f = (G/f)/e$!

2.3.27. Jelöljük $f(G)$-vel a G gráf feszítő erdőinek számát. Tegyük fel, hogy az e él sem nem hurok, sem nem elvágó él. Mutassuk meg, hogy ilyenkor $f(G) = f(G - e) + f(G/e)$!

2.3.28. Legyen A és B a G gráf élhalmazának két diszjunkt részhalmaza. Tegyük fel, hogy A körmentes, B vágásmentes. Bizonyítsuk be, hogy van G-nek olyan feszítő erdője, mely A-t tartalmazza és B-től diszjunkt!

2.3.29. (folyt.) Lássuk be, hogy egy $X \subseteq E(G)$ élhalmaz akkor és csak akkor ilyen tulajdonságú feszítő erdő, ha $X - A$ feszítő erdő $(G - B)/A$-ben!

2.3.30. Egy gráf síkbarajzolhatóságának nyilván szükséges feltétele, hogy élek elhagyása és összehúzása során ne juthassunk el belőle a Kuratowski-gráfok valamelyikéhez. Kuratowski tételének felhasználásával lássuk be, hogy ez a feltétel elégséges is!

2.3.31. * (folyt.) Adjunk példát olyan gráfra, melyből élek összehúzásával el lehet jutni a K_5 gráfhoz, azonban a gráf ne tartalmazzon K_5 -tel topologikusan izomorf részgráfot!

Euler- és Hamilton-körök és -utak

2.4.1. Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen mindkét irányban pontosan egyszer megyünk végig!

2.4.2. Mutassuk meg, hogy ha egy összefüggő gráf páratlan fokú pontjainak a száma $2k$, akkor a gráf élhalmaza lefedhető k darab élsorozat diszjunkt egyesítésével!

2.4.3. Legalább hány élet kell hozzáadni a Petersen-gráfhoz, hogy a keletkező gráfban legyen Euler-út?

2.4.4. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

2.4.5. Milyen n értékekre tartalmaz az n-pontú teljes gráf Euler–kört vagy –utat?

2.4.6. Jelöljük $Z(a,b)$-vel az a egység hosszú, b egység széles téglalap alakú "kockás" papír által meghatározott gráfot! Van-e a-nak és b-nek olyan értéke, amikor $Z(a,b)$-nek van Euler–köre vagy -útja?

2.4.7. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban van Euler–kör, akkor minden vágásának páros sok éle van!

2.4.8. (folyt.) Igaz ez az állítás visszafelé?

2.4.9. Hány különböző Hamilton-kört, ill. utat tartalmaz az n szögpontú teljes gráf, K_n?

2.4.10. Hány különböző Hamilton-kört tartalmaz az az n szögpontú gráf, amit K_n-ből kapunk egy élének elhagyásával?

2.4.11. Hány különböző Hamilton-kört, ill. utat tartalmaz az $K_{n,n}$?

2.4.12. Adjon olyan a, b értékeket, melyekre az 2.4.6. feladatban definiált $Z(a,b)$ gráfnak van, ill. nincs Hamilton–köre vagy –útja!

2.4.13. Létezik-e olyan 6 pontú és 11 ill. 12 élű gráf, amelynek nincs Hamilton–köre?

2.4.14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\binom{n-1}{2}+2$ éle van, akkor van benne Hamilton–kör! Igaz-e ez $\binom{n-1}{2}+1$ él esetén is?

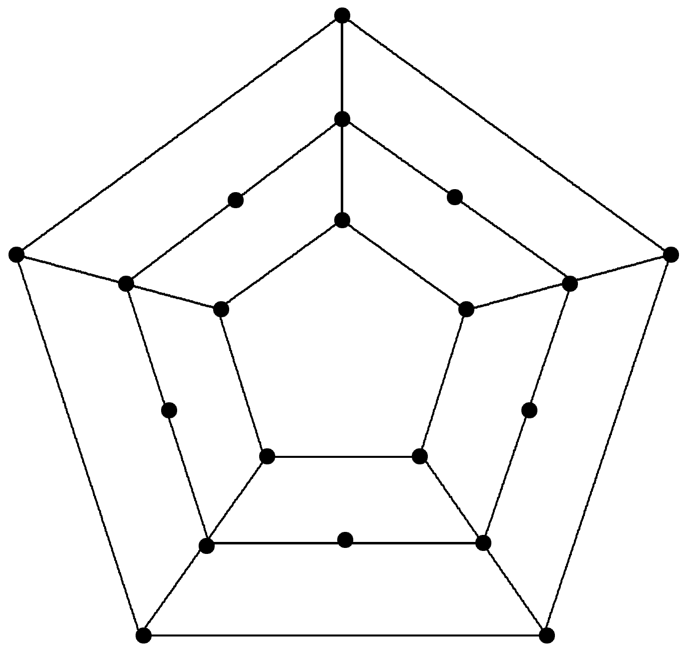
2.4.15. A $G_{n,k}$ gráf pontjai egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazainak felelnek meg. Két pont akkor van összekötve egy éllel, ha a pontoknak megfelelő két részhalmaz diszjunkt. Van-e $G_{n,k}$-nak Euler–, ill. Hamilton–köre ha

a) $n = 6, k = 3$?

b) $n = 16, k = 3$?

2.4.16. Van-e Hamilton–köre a 2.11. ábrán látható gráfnak?

2.4.17. Van-e Hamilton-kör a 3– ill. 4–dimenziós kocka éleiből álló gráfban?



2.11. Ábra

2.4.18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő G gráf K köréből egy élt törölve G egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton–kör volt G-ban!

2.4.19. Mutassuk meg, hogy ha egy n-pontú gráf egyik maximális hosszúságú útja két végpontjának fokösszege $\geq n$, akkor van a gráf maximális útjai közt olyan, amelynek végpontjai szomszédosak!

2.4.20. Lássuk be, hogy a Petersen–gráf nem tartalmaz Hamilton–kört! És ha elhagyjuk valamelyik pontját?

Irányított gráfok

2.5.1. Lássuk be, hogy a gráf pontjainak be–fokait vagy ki–fokait összeadva ugyanazt az értéket kapjuk! Mennyi ez a közös érték?

2.5.2. Rajzoljuk fel az összes olyan, páronként nem izomorf, 3 pontú és 4 élű, hurokmentes irányított gráfot, melynek van olyan pontja, amelynek ki–foka és be–foka is 2!

2.5.3. Legalább hány éle van egy n pontú erősen összefüggő gráfnak?

2.5.4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges irányított gráfban nincs irányított kör, akkor van forrás és nyelő!

2.5.5. Igaz-e az előző állítás megfordítása?

2.5.6. Miért kellett a „véges” szó a 2.5.4. feladat állításában?

2.5.7. Hány irányított kör lehet, ha a gráf minden pontjának 1 a ki–foka?

2.5.8. A 2.2.10. feladat analógiája nem igaz: mutassunk példát olyan erősen összefüggő gráfra, amelynek bármely pontját elhagyva elromlik az erős összefüggőség!

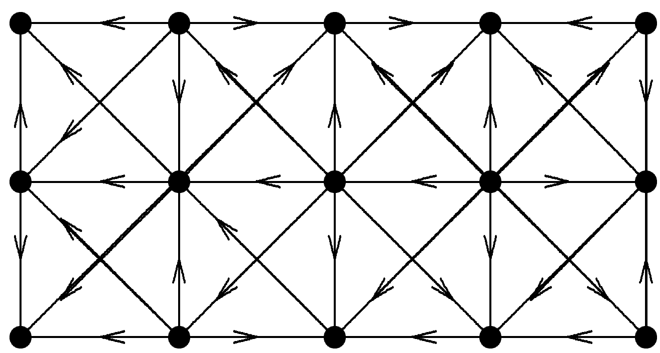
2.5.9. Lássuk be, hogy G akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha tetszőleges $A \subseteq V(G)$-re van A-ból $V - A$-ba mutató él!

2.5.10. Az $A \subseteq V(G)$ pontokat a $V - A$-beli pontoktól elválasztó vágást akkor hívjuk irányított vágásnak, ha vagy minden éle A-ból $V - A$-ba mutat, vagy minden éle $V - A$-ból A-ba mutat. Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha nincs benne irányított vágás!

2.5.11. Mutassuk meg, hogy minden élt vagy irányított kör, vagy irányított vágás tartalmaz!

2.5.12. Hagyjuk el az irányított G gráf forrásait és nyelőit. Ismételjük meg az eljárást a keletkező gráfra, majd az ezután keletkezőre stb., amíg se forrást, se nyelőt nem tartalmazó gráfhoz nem jutunk. Lássuk be, hogy akkor és csak akkor jutunk így a pont nélküli gráfhoz, ha G nem tartalmazott irányított kört!

2.5.13. Van-e irányított kör a 2.12. ábrán látható gráfban?



2.12. Ábra

2.5.14. Húzzuk össze egy irányított gráf erősen összefüggő $P_1, P_2, \ldots$ komponenseit egy-egy $p_1, p_2, \ldots$ pontba és az új gráfban akkor és csak akkor legyen (p_i, p_j) él, ha az eredetiben $V(P_i)$-ből $V(P_j)$-be vezetett legalább egy él. Mutassuk meg, hogy az új gráfban nincs irányított kör!

2.5.15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő G gráf minden pontjának ugyanaz a ki– és be–foka, akkor G erősen összefüggő!

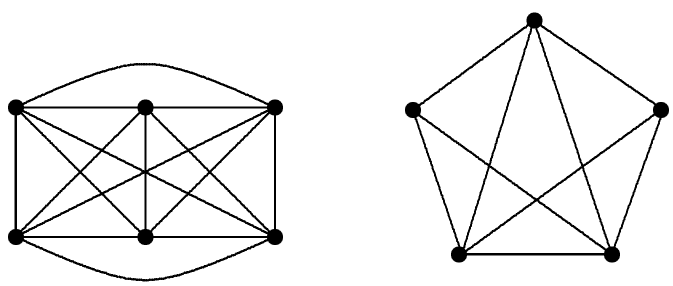
A következő feladatokhoz: körmérkőzés-gráfnak hívunk egy irányított teljes gráfot.

2.5.16. Mutassuk meg, hogy minden ilyen gráfban van legalább egy olyan pont, melyből minden más pont 1 vagy 2 hosszú irányított úton elérhető.

2.5.17. Bizonyítsuk be, hogy egy erősen összefüggő körmérkőzés gráfnak legalább $\binom{n-1}{2}$ különböző irányított köre van!

2.5.18. Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen gráfnak van irányított Hamilton–útja!

2.5.19. Irányíthatók-e úgy a 2.13. ábrán látható gráfok élei úgy, hogy erősen összefüggőek legyenek, de ne legyen bennük irányított Hamilton-kör?



2.13. Ábra

2.5.20. Azt is lássuk be, hogy ha egy körmérkőzés-gráf erősen összefüggő, akkor irányított Hamilton–köre is van!

2.5.21. Tegyük fel, hogy egy körmérkőzés-gráf nem erősen összefüggő. Mutassuk meg, hogy ilyenkor van olyan éle, melynek az irányítását megfordítva erősen összefüggővé tudjuk tenni!

2.5.22. Hagyjunk el egy élt egy n pontú teljes gráfból. Bizonyítsuk be, hogy ezt már lehet úgy irányítani, hogy ne legyen benne irányított Hamilton–út!

2.5.23. Tegyük fel, hogy egy erősen összefüggő gráf elveszti ezt a tulajdonságát legfeljebb k él elhagyásával. Mutassuk meg, hogy legfeljebb k él irányításának a megfordításával is elérhetjük ezt!

2.5.24. Kék, zöld és piros színnel színeztük egy irányított gráf éleit. Legyen e zöld. Bizonyítsuk be, hogy vagy van olyan e-t tartalmazó kör, melyben kék él nincs és minden zöld él ugyanolyan irányítású a kör mentén, vagy van olyan e-t tartalmazó vágás, melyben nincs piros él és minden zöld él ugyanolyan irányítású a vágás mentén!

2.5.25. Mutassuk meg, hogy bármely gráf éleit meg lehet úgy irányítani, hogy minden pont be–foka és ki–foka legfeljebb eggyel különbözzék egymástól.

2.5.26. Van-e, és ha van melyik az a legkisebb pontszámú teljes gráf, melyre igaz, hogy bármely három élének elhagyása után még irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen?

2.5.27. A G síkbarajzolható gráf minden élét irányítsuk valamelyik irányba úgy, hogy a kapott G' gráf erősen összefüggő legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik G-nek olyan tartománya, amelyet G'-ben irányított kör határol!

2.5.28. Maximum hány éle lehet egy n pontú, irányított kört nem tartalmazó egyszerű gráfnak?

Szomszédossági mátrix

3.1.1. Legyen A egy egyszerű irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor igaz, hogy A bármely két sorának a skaláris szorzata legfeljebb egy, ha a gráf nem tartalmaz 4 hosszúságú kört!

3.1.2. Lássuk be, hogy egy egyszerű irányítatlan gráf akkor és csak akkor páros, ha szomszédossági mátrixának minden páratlan kitevőjű hatványában minden diagonál-elem zérus!

Illeszkedési mátrix

3.2.1. Mutassuk meg, hogy az n-pontú (irányítatlan) fa illeszkedési mátrixának a valós test felett is $n-1$ a rangja!

3.2.2. Adjunk példát hurokél–mentes összefüggő irányítatlan gráfra, melynek illeszkedési mátrixa a valós test felett $(n-1)$-nél nagyobb rangú!

3.2.3. * Bizonyítsuk be, hogy az előző feladat tulajdonságával egy gráf akkor és csak akkor rendelkezik, ha nem páros!

3.2.4. Legyen A és B egy hurokél-mentes irányított gráf szomszédossági, ill. illeszkedési mátrixa. Mi mondható a $B - A$ mátrixról?

Körmátrix

3.3.1. Az alábbi mátrixok közül melyek állnak elő gráfok körmátrixaként?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2. Adjunk példát $e - p + 1$ darab olyan körre, melyeknek a körmátrixban megfelelő vektorai lineárisan függetlenek és amelyek egyetlen kifeszítő fához tartozó alapkörrendszer elemeiként sem állnak elő!

3.3.3. * A 7. feladat mátrixai közül melyek állnak elő gráfok körmátrixainak alkalmas részmátrixaként?

3.3.4. * Él elhagyásakor hogyan változik egy gráf kör– és vágásmátrixa?

Egyéb gráfreprezentációk

3.4.1. * Legyen X egy 0 és ± 1 elemekből álló mátrix, melynek minden sorában páros sok nemzérus elem található. Bizonyítsuk be, hogy $\det X$ páros!

3.4.2. Hogyan ismerhető fel egy hurokél vagy egy elvágó él egy — valamelyik mátrixával adott — gráfban?

3.4.3. Bizonyítsuk be, hogy egy irányított gráf illeszkedési mátrixának minden négyzetes részmátrixára a determináns 0 vagy ± 1!

3.4.4. Példán mutassuk meg, hogy a kör- és a vágásmátrixokra ugyanez nem feltétlenül igaz!

Síkbarajzolható gráfok

3.5.1. Adjunk példát olyan térképre, amely 3 színnel nem színezhető meg!

3.5.2. Ha a közös határ–ponttal rendelkező országokat is szomszédosnak neveznénk (pl. a 3.4. ábra baloldalán a 3. és 5. tartományokat), akkor általában több színre lenne szükség.

Adjunk példát olyan gráfra, mely ilyenkor még 5 színnel sem színezhető meg!

3.5.3. A síkot véges sok mindkét irányban végtelen egyenes elhelyezésével „országokra” bontjuk. Mutassuk meg, hogy ez a „térkép” 2 színnel megszínezhető!

3.5.4. (folyt.) Érvényes marad-e az előző állítás, ha egyeneseken kívül köröket is megengedünk? És ha félköröket is?

3.5.5. Készítsük el az 2.7. ábra 2. és 3. gráfjának a duálisát!

3.5.6. Mutassuk meg, hogy a Kuratowski-gráfoknak nem lehet duálisa!

3.5.7. Keressünk olyan gráfokat, melyek izomorfak a duálisokkal!

3.5.8. Adjunk példát olyan igaz gráfelméleti állításra, mely „dualizálva” hamissá válik!

3.5.9. Definiáljuk két e, f él „soros” helyzetét úgy, hogy $\{e, f\}$ vágást alkot. Igazoljuk a 3.2. Táblázat ötödik sorának helyességét!

3.5.10. (folyt.) Megegyezik-e az előző definíció a villamosságtanban szokásos definícióval, mely szerint e és f akkor és csak akkor soros élek, ha egyik sem hurokél és mindkettő illeszkedik egy másodfokú ponthoz?

Keresés

4.1.1. Tegyük fel, hogy egy számítógép egymillió műveletet tud elvégezni egy másodperc alatt. Ha 1 perc gépidő áll rendelkezésünkre, akkor a keresésre megismert két algoritmus közül az elsőt legfeljebb $n = 6 \cdot 10^7$ érték esetén alkalmazhatjuk. Ekkor a második algoritmus lépésszáma $\log_2 6 \cdot 10^7$. Mennyi ideig tart ez?

4.1.2. Gondoltam egy számot 0 és 31 között. Nyilván ki lehet barkochbázni 5 kérdéssel. Adjon meg előre 5 kérdést (tehát ne az első válasz után adja meg a 2. kérdést, a 2. válasz után a 3. kérdést stb.) úgy, hogy az azokra adott válaszokból kitalálható legyen a gondolt szám.

4.1.3. 16 látszatra egyforma pénzdarab között egyik hamis, könnyebb a többinél. Egy egykarú, skálás mérlegen közülük akárhány érme összsúlyát meg tudjuk határozni, és ebből megállapítani, hogy köztük van-e a hamis. Keressük meg a hamis pénzt minimális számú méréssel. Hasonlítsuk össze feladatunkat a beszúrási feladattal.

4.1.4. 27 látszatra egyforma pénzdarab között egyik hamis, könnyebb a többinél. Keressük meg a hamisat a lehető legkevesebb méréssel ha egy kétkarú mérlegünk van, súlyok nélkül!

Legalább hány mérés kell, ha $10 \leq n \leq 26$ érménk van?

4.1.5. 5 érménk van, 4 valódi és egy hamis, amiről csak azt tudjuk, hogy a súlya különbözik a valódi érmék súlyától, de azt nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb náluk. Egy kétkarú mérlegen legalább hány mérést kell végeznünk, hogy megtaláljuk, melyik a hamis és meghatározzuk, hogy könnyebb vagy nehezebb a többinél? És ha 15 érménk van?

4.1.6. (folytatás) És hány mérésre van szükség ha csak 4 érménk van, de nem kell megmondani, hogy a hamis könnyebb vagy nehezebb, csak azt, melyik a hamis?

4.1.7. n érméből egy hamis, könnyebb a többinél. Egy kétkarú mérlegen legfeljebb 3 mérést végezhetünk. Valaki az első mérésnél $4-4$ darabot tesz mindkét serpenyőbe és a mérés bármely kimenetele esetén meg tudja találni a hamisat. Legfeljebb mekkora lehet n?

4.1.8. n érméből egy hamis, de nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb a többinél. Egy kétkarú mérlegen legfeljebb 3 mérést végezhetünk. Valaki az első mérésnél $3-3$ darabot tesz mindkét serpenyőbe. Mutassuk meg, hogy $n = 9$-re meg lehet találni a hamisat, de $n = 11$-re nem biztos!

4.1.9. Bergengóciában $1, 2, 3$ és 5 petákos érméket használnak. Mindegyik annyi gramm tömegű, ahány petákot ér. Van $1-1$ érménk mindegyikből, de az egyik hamis, ezért tömege eltér a valódiétól. Kétkarú mérleggel hány méréssel állapíthatjuk meg, hogy

a) melyik a hamis?

b) melyik a hamis és könnyebb vagy nehezebb mint a valódi?

4.1.10. (folytatás) Fibonacciaban $1, 2, 3, 5$ és 8 petákos érméket használnak. Oldjuk meg az előző feladat analógjait!

Sorba rendezés

4.3.1. Az 4.1.1. feladatban szereplő $6 \cdot 10^7$ művelet maximum mekkora n-re elég az $n^2/2$, illetve $cn \cdot \log_2 n$ lépésszámok esetén (utóbbi esetben próbálkozzunk $c = 1, 10, 100$ értékekkel)?

4.3.2. Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat is, a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sorozat is nagyság szerint növekedően van rendezve. Adjunk algoritmust, mely ezt a $2n$ darab számot egyetlen növekedő sorozatba fésüli össze.

Szomszédossági listák

5.1.1. Mutassuk meg, hogy a szomszédossági lista átalakítható rendezett szomszédossági listává $(e+v)\log d$-vel arányos lépésszámban (d =maximális fokszám)!

5.1.2. * Az előző átalakítást $(e+v)$-vel arányos lépésszámban is csináljuk meg!

5.1.3. Bizonyítsa be az 5.1. Táblázat első három oszlopában állítottakat!

Láncolt szomszédossági listák

5.2.1. Bizonyítsa be az 5.1. Táblázat utolsó oszlopában szereplő első 5 állítást!

5.2.2. Bizonyítsa be az utolsó oszlop utolsó állítását is.

5.2.3.

(a) Egészítse ki az 5.1. Táblázatot az intervallumrendszerrel megadott intervallumgráfok (ld. 95. oldal) gráfok esetére!

(b) Mutassa meg, hogy ha $(p_1p_2p_3\dots p_k)$ egy intervallumgráf köre $(k \geq 4)$, akkor a körnek legalább egy átlója is van (tehát legalább egy $\{p_i, p_j\}$ él úgy, hogy i és j nem szomszédos számok és nem is $\{i,j\} = \{1,k\}$)!

Hogyan járjunk be gráfokat?

6.1.1. Van-e olyan gráf, melynek valamely pontból csak egyféle bejárása lehetséges?

6.1.2. Milyen a teljes gráf mélységi, ill. szélességi bejárása?

6.1.3. Mutassuk meg, hogy a K_4 gráf tetszőleges fája előáll egy mélységi vagy szélességi bejárás fájaként. Igaz-e ugyanez K_5 -re is?

6.1.4. Készítsünk olyan $G_1, G_2, \dots$ gráfsorozatot, melynek tagjaira a mélységi keresést alkalmazva a talált fa leghosszabb útjának a hossza cn tempóban növekszik, míg a szélességi keresés fájában konstans marad.

6.1.5. Hogyan járna be egy (ismeretlen alaprajzú) labirintust?

6.1.6. Tegyük fel, hogy egy gráfban minden pont foka legalább k. Bizonyítsuk be, hogy a gráf minden $k+1$ pontú fát tartalmaz részgráfként!

6.2.1. Bizonyítsuk be, hogy egy irányított G gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha G

bármely pontjából indítva a mélységi vagy a szélességi keresést, minden ponthoz eljutunk.

A legrövidebb út keresése élsúlyozatlan gráfban

7.1.1. Készítsen olyan algoritmust, mely egy (élsúlyozatlan) gráfban meghatározza, hányféle legrövidebb út van s-ből t-be.

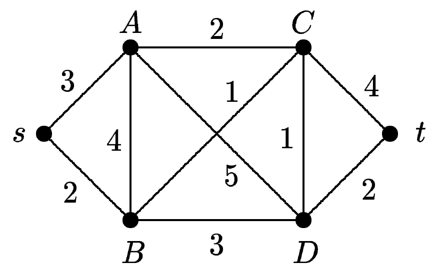
7.1.2. Legyen F egy gráf s pontjából kiinduló szélességi keresés során létrejött fa. Írjuk minden $x \neq s$ pont mellé az s-ből x-be vezető legrövidebb út hosszát (vagyis az egyetlen F-beli s és x közötti út hosszát). Bizonyítsuk be, hogy egy $e \notin F$ él két végpontjához írt a, b számokra $0 \leq |a - b| \leq 1$ és adjunk példát mind a 0, mind az 1 előfordulására!

7.1.3. Adjunk polinom rendű algoritmust, mely meghatározza egy gráf legrövidebb körének (köreinek) hosszát!

7.1.4. A G gráfban bármely két pont között a legrövidebb út hossza legfeljebb 2. Milyen hosszú lehet G-ben a legrövidebb kör?

Dijkstra algoritmusa

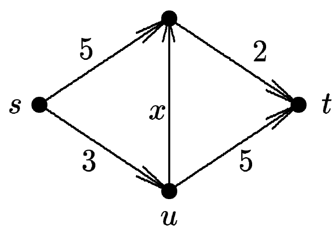
7.2.1. Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legrövidebb utat s és t között a 7.1. ábra gráfján és mutassuk meg az algoritmust lépésről lépésre!



7.1. Ábra

7.2.2. Határozzuk meg a legrövidebb út hosszát s-ből t-be és u-ba a 7.2. ábra gráfján az x paraméter tetszőleges pozitív, valós értéke esetén!

7.2.3. Konstruáljunk olyan minimum 5 pontú irányítatlan gráfot pozitív élsúlyokkal, hogy



7.2. Ábra

valamely s, t pontpár közti legrövidebb utat a Dijkstra algoritmus pontosan a 4. „körben” szolgáltatja!

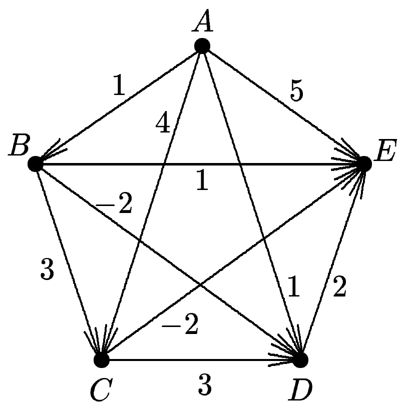
7.2.4. Dijkstra algoritmusa csak az s-ből bármely x-be vezető legrövidebb út hosszát határozta meg. Módosítsuk az algoritmust úgy, hogy a legrövidebb utat (vagy azok egyikét) is megkaphassuk!

Ford algoritmusa

7.3.1. Végezzük el ugyanazt a módosítást Ford algoritmusára, amit a 7.2.4. feladatban Dijkstra algoritmusára végeztünk el! Megtalálja-e a módosított algoritmus az esetleges negatív összhosszúságú irányított köröket is?

7.3.2. Adjon példát irányított gráfok olyan G_n sorozatára, ahol $v(G_n) = n$ és G_n irányított köreinek száma legalább n-ben exponenciális tempóban tart végtelenhez.

7.3.3. Mekkora a legrövidebb irányított út hossza A-ból E-be a 7.3. ábra gráfján?



7.3. Ábra

7.3.4. Milyen élsorrend esetén végzi a Ford algoritmus a lehető legtöbb ill. a legkevesebb lépést a 7.3. ábra gráfján?

Floyd algoritmusa

7.4.1. Határozzuk meg a legrövidebb irányított út hosszát az összes lehetséges pontpár között a 7.3. ábra gráfján?

Párosítások

8.1.1. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig); egy ember több helyre is:

Aladár az 1-es munkahelyre

Béla az 1,6-os munkahelyre

Csaba a 2,3,4-es munkahelyre

Dani a 2,5-ös munkahelyre

Erzsi a 3,4,5-ös munkahelyre

Feri a 1,6-os munkahelyre

Géza a 6-os munkahelyre

(a) Ábrázoljuk a helyzetet páros gráffal!

(b) Döntsük el, hogy betölthető-e mind a 6 munkahely (egy ember csak egy helyre kerülhet). Ha nem mind, akkor hány tölthető be? Indokolja is a választ!

(c) Javít-e valamit, ha Feri meggondolja magát és a 2. munkahelyet is hajlandó elfogadni?

8.1.2. (folytatás) Egy munkaközvetítőnél hat ember jelentkezett. Nyolc állás jöhet szóba:

Ákos 1,2,3,4,5,6 munkahely

Bandi 2,5,8 munkahely

Csilla 2,5 munkahely

Dóra 2,8 munkahely

Ernő 5,8 munkahely

Feri 1,2,3,4,7 munkahely

Adjon meg egy lehető legnagyobb független élrendszert! Indokolja meg, miért nincs nagyobb!

8.1.3. Egy harmadik cégnél hét helyre csak hatan pályáznak:

Anita 1,2 munkahelyre

Bea 2,3 munkahelyre

Cirill 3,4 munkahelyre

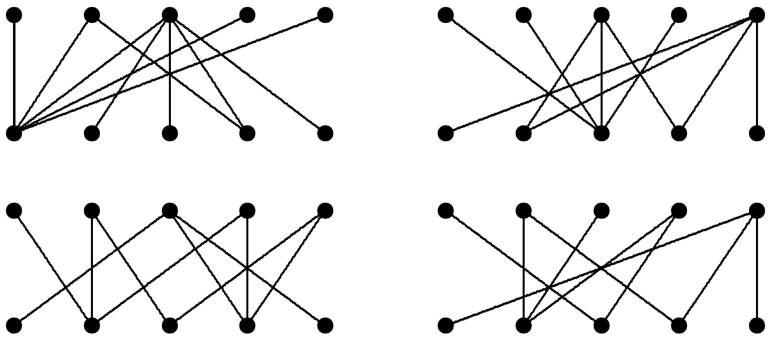
Diana 4,5 munkahelyre

Elemér 5,6 munkahelyre

Frici 6,7 munkahelyre

A főnök már belenyugodott, hogy így nem lehet az összes helyet betölteni. El is döntötte, hogy a hat emberből ki hova kerül: A 1, B 2, C 3, D 4, E 5, F 6. Ekkor érkezik a postás egy távirattal: „megpaalyaazom a 2-es munkahelyet stop geeza stop stop." A fenti hat független élből melyeket cseréli ki a főnök és mely másikakra?

8.1.4. Keressünk maximális párosítást a 8.1. ábra gráfjaiban!



8.1. Ábra

8.1.5. Egy páros gráf egyik pontosztályában van olyan X részhalmaz, amelyre $|N(X)| \leq |X| - 2$. Bizonyítsuk be, hogy nincs a gráfban Hamilton-út!

8.1.6. Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak (egy ember több bizottságnak is tagja lehet) és most minden bizottság a saját tagjai közül egy-egy elnököt szeretne kinevezni. Bármely bizottság bármely tagja alkalmas lenne elnöknek, de nem akarják, hogy valaki egyszerre több bizottságnak is elnöke legyen. Mikor valósítható ez meg?

8.1.7. Mutassa meg, hogy r-reguláris páros gráf biztosan teljesíti a Hall–feltételt!

Következmény: r–reguláris páros gráfnak mindig van teljes párosítása.

8.1.8. Egy páros gráf minden csúcsába pontosan r él fut. Véletlenül éppen r darab különböző színű ceruzánk van (a feketén kívül, amivel az eredeti ábra készült). Bizonyítsuk be, hogy az élek kihúzhatók színessel úgy, hogy minden csúcsba csupa különböző színű menjen!

8.1.9. (folytatás) Adjunk példát olyan nem–páros, de reguláris gráfra, ahol a fenti színezés lehetetlen!

8.1.10. Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráfban minden pont foka $\leq r$, akkor pontok és élek hozzávételével kiegészíthető olyanná, amelyben minden csúcsra pontosan r él illeszkedik!

8.1.11. Legyen a G egyszerű, páros gráfban a maximális fokszám k. Bizonyítsuk be, hogy van olyan párosítás G-ben, amely lefedi az összes k fokú pontot!

8.1.12. Legyen G egy r-reguláris páros gráf, $r \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy G ponthalmaza lefedhető diszjunkt körökkel!

8.1.13. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, páros gráf, amelynek mindkét pontosztályában n pont van. Az egyik osztályban minden pont foka különböző. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás!

8.1.14. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő páros gráfban van Hamilton–kör, akkor van teljes párosítás is? Igaz-e az állítás megfordítása?

8.1.15. Egy osztályban vegyes párosokat szeretnének összeállítani az iskolai tollaslabda–bajnokságra. Öt lány és öt fiú tud játszani, de nem minden szóba jöhető pár akar együtt szerepelni: Andrisnak mindegy; játszana Flórával, Gabival, Helgával, Ildivel vagy akár Jutkával is. Balázs, Csaba, Dani és Ede viszont csak Jutkával hajlandó egy párba kerülni. Hány párt tud az osztály kiállítani? (Ötlet: lehet-e olyan pár, amelyikben sem Andris, sem Jutka nincs benne?)

8.1.16. Az asztalitenisz bajnokság fiú párosainak összeállítása sem megy simán: a tíz pingpongozni tudó fiúból Andris és Balázs csak Marcival akar egy párba lenni. Csaba és Dani Norbival, Ede és Karcsi pedig Oszihoz ragaszkodnak. Laci lenne Marcival, Norbival vagy akár Oszival is. Az utóbbi három bárki oldalán kiállna, akik őket választották. Összeállítható-e öt vagy legalább négy pár? (ötlet: kik azok, akik nélkül nincs páros?)

8.1.17. Egy osztály mind a 20 fiú tanulója szeret pingpongozni. Egyéniben mindnyájan indulnak is az iskolai bajnokságon, de 10 párost is ki akarnak állítani. Sajnos, Karcsin és Marcin kívül - akik mindenkivel jól kijönnek - a maradék 18 gyerek négy csoportra bomlik. Egyik ilyen társaság hét tagból áll, a másik ötből, a maradék kettőben hárman-hárman vannak. Senki sincs jóban a többi csoport tagjaival, olyannyira, hogy nem is akarnak velük egy párba kerülni. Kiállítható-e azért még a tíz pár?

8.1.18. A G összefüggő gráf tetszőleges pontját elhagyva a kapott gráfnak létezik teljes párosítása. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él!

8.1.19. Egy $2n$ pontú teljes gráfból elhagyjuk egy teljes párosítás éleit. Hány különböző 3 hosszú kör található a maradék gráfban?

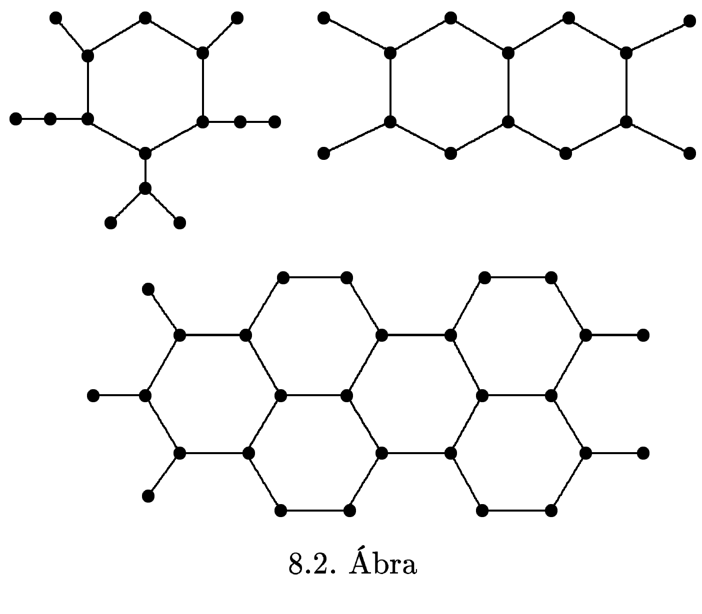
8.1.20. Mutassuk meg, hogy $2n-1$ csapat egy teljes bajnokságot le tud játszani $2n-1$ fordulóban (mindenki mindenkivel egyszer játszik).

8.1.21. Mutassa meg, hogy egy fának nem lehet két különböző teljes párosítása!

8.1.22. Hány különböző teljes párosítása van a 3-dimenziós kocka élhálója által alkotott gráfnak?

8.1.23. * Hány különböző teljes párosítása van annak a gráfnak, ami egy n fokú létrához hasonlít?

8.1.24. Határozzuk meg a független élek maximális számát a 8.2. ábra gráfjain! Bizonyítsuk be, hogy nem lehet többet találni!



8.2. Ábra

8.1.25. Mennyi $\tau(K_{n,m})$?

8.1.26. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n-1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

8.1.27. Legyen F_1 és F_2 két független élhalmaz egy G gráfban. Mutassuk meg, hogy az $(F_1 \cup F_2) - (F_1 \cap F_2)$ élhalmaz által meghatározott részgráf minden összefüggő komponense vagy útja vagy köre G-nek! Mit mondhatunk az esetleges körök hosszáról?

8.1.28. (folytatás) Bizonyítsuk be, hogy egy független élhalmaz vagy maximális, vagy javítható egy rá nézve alternáló úttal!

8.1.29. (folytatás) Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges független élhalmaz pontjai lefoghatók egy alkalmas maximális független élhalmazzal is!

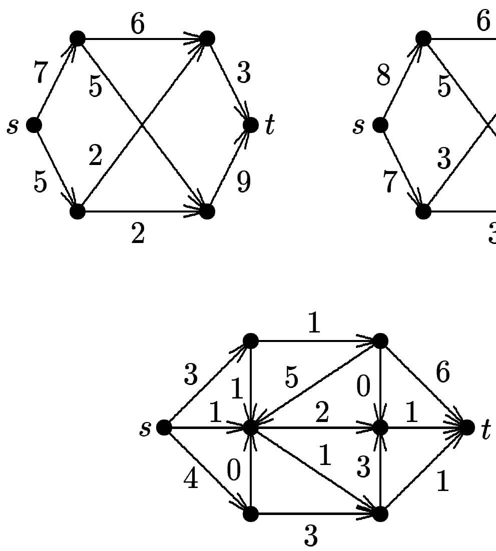
8.1.30. Legyen $\Delta(G)$ egy gráfban a maximális fokszám. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E(G)|$!

8.1.31. Bizonyítsuk be, hogy egy hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E(G)|$!

8.1.32. Legyen F egy maximális független ponthalmaz az egyszerű G gráfban és legyen F' egy független ponthalmaz $V(G) - F$-ben. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq |F'|$!

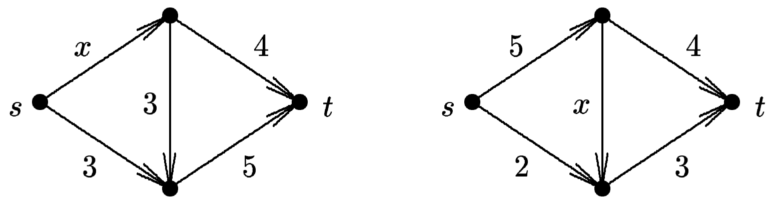
Hálózati folyamok

8.2.1. Határozzuk meg a maximális folyam értékét a 8.3. ábrán látható hálózati folyamokon és bizonyítsuk is be, hogy ez maximális!



8.3. Ábra

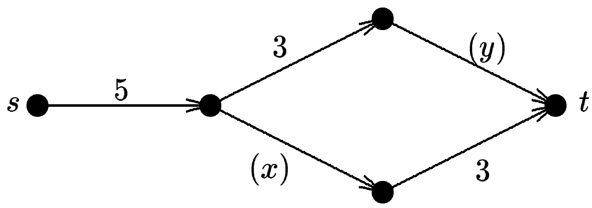
8.2.2. Határozzuk meg a nemnegatív, valós x függvényében a 8.4. ábrán látható hálózatokban



8.4. Ábra

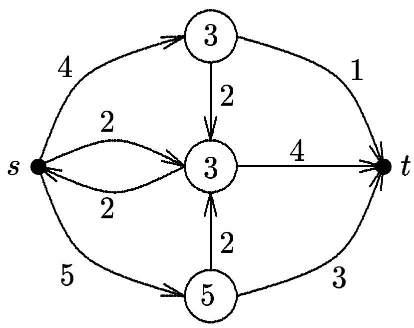
a maximális folyam értékét!

8.2.3. Határozzuk meg a nemnegatív, valós x és y függvényében a 8.5. ábrán látható hálózatban a maximális folyam értékét!



8.5. Ábra

8.2.4. Határozzuk meg a maximális folyam értékét a 8.6. ábrán látható pont– és élkapacitásokkal ellátott hálózati folyamon és bizonyítsuk is be, hogy ez maximális!

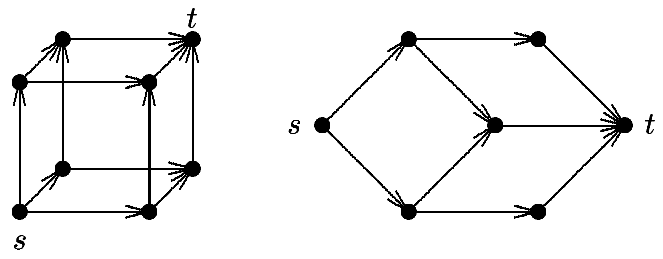


8.6. Ábra

8.2.5. A 8.7. ábrán látható első gráf élei közül írjunk háromra 1 kapacitást, háromra 2-t és háromra 3-at úgy, hogy a maximális folyam a lehető legnagyobb illetve a lehető legkisebb legyen!

8.2.6. A 8.7. ábrán látható második gráf élei közül írjunk hatra 1 és hatra 2 kapacitást úgy, hogy a maximális folyam a lehető legnagyobb illetve a lehető legkisebb legyen!

8.2.7. Igaz-e, hogy ha minden él kapacitása páros szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páros szám? Igaz-e ugyanez páratlan számokkal?



8.7. Ábra

8.2.8. Legyenek egy gráf pontjai az n hosszúságú $0-1$ sorozatok. Vezessen egy irányított él a-ból b-be, ha a-ban kevesebb 1-es van, mint b-ben, és legyen egy ilyen él kapacitása az egyesek számának különbsége. Legyen F_n a maximális folyam értéke $s=(0,\ldots,0)$ és $t=(1,\ldots,1)$ között. Mennyi F_3? Mennyi általában F_n?

8.2.9. Legyenek egy gráf pontjai az n hosszúságú $0-1$ sorozatok. Vezessen él a-ból b-be, ha b-t megkapjuk a-ból úgy, hogy az a-beli egyik 0-t 1-re cseréljük. Ha ez a csere az i-ik koordinátában történt, akkor a kapacitás legyen i. Legyen f_n a maximális folyam értéke $s=(0,\ldots,0)$ és $t=(1,\ldots,1)$ között. Mennyi f_3? Bizonyítsuk be, hogy $f_n \le 2^{n-1}$!

8.2.10. * Egy város szennyvízcsatornájába számos helyen befolyhat az esővíz és csak egy helyen folyhat ki. Nagy felhőszakadások esetén a rendszer nem képes minden vizet levezetni. Ha ismerjük az egyes szakaszok kapacitását, hogyan határozhatjuk meg a kibővítendőket?

8.2.11. * Liliputban csak házasságközvetítőn keresztül köthetnek házasságot a párok és egy-egy házasságközvetítő évente legfeljebb m esküvőt szervezhet. Egy-egy törpe–fiú több törpe–lány között is választhat; és ha egy törpe-fiú több házasságközvetítővel is kapcsolatba lép, akkor mindegyiknek elmondja barátnői teljes listáját. Adjunk algoritmust, mely maximalizálja az egy évben szervezhető esküvőket.

8.2.12. * Oldjuk meg az előző feladat Dél-liliputi változatát is (ahol még megengedett a többnejűség)?

8.2.13. Mutassuk meg, hogy egy k–szorosan összefüggő n-pontú gráfnak legalább $kn/2$ éle van.

8.2.14. Legyen $k \le n-1$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+k-2)/2$, akkor a gráf k-szorosan pontösszefüggő!

8.2.15. Bizonyítsuk be, hogy 3–reguláris gráfokra a pont– és élösszefüggőségi számok egyenlőek.

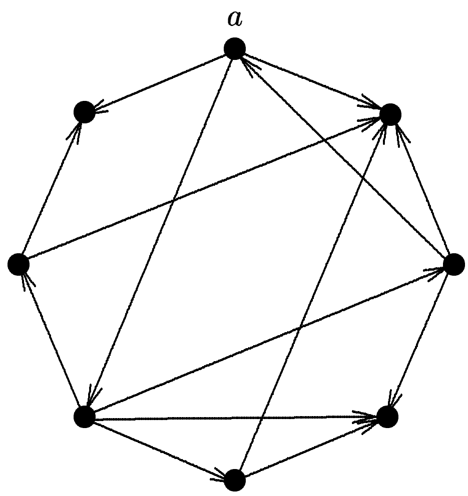
Alapkörrendszer keresése

9.1.1. Lehet-e hasonlóan egyszerű algoritmust adni az alapkörrendszer előállítására a szélességi keresés segítségével?

9.1.2. Ha egy n pontú teljes gráf alapkörrendszerét határozzuk meg, mennyi az algoritmus lépésszáma?

Irányított körök felismerése

9.2.1. A 9.1. ábrán látható irányított gráfnak adja meg egy, az a pontból induló mélységi fáját, és erre vonatkozóan az előre-, vissza- és keresztéleket!



9.1. Ábra

9.2.2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy irányított gráfban nincs irányított kör, akkor van forrás és nyelő!

9.2.3. Példán illusztráljuk, hogy az előző állítás végtelen gráfokra nem feltétlenül igaz.

9.2.4. Ellenpéldával mutassuk meg, hogy a 9.2.2. állítás nem fordítható meg.

9.2.5. * Egy irányított kört nem tartalmazó G gráf emeletekre bontásban két u, v pont nyilván csak akkor kerülhet ugyanabba a V_i részhalmazba, ha sem u-ból v-be, sem v-ből u-ba nem vezet irányított út. Mutassuk meg, hogy ez a feltétel elégséges is, vagyis tetszőleges két ilyen ponthoz van olyan emeletekre bontás, melyben egy részhalmazba tartoznak.

9.2.6. * A 9.2. szakasz végén látott algoritmus a lehető legtöbb (ugyanis v darab) részhalmazra bontotta V-t. Mi lehet az emeletekre bontható irányított gráfoknál a részhalmazok számának minimuma?

9.2.7. Legyen egy n-elemű halmaz 2^n darab részhalmaza egy G_n irányított gráf ponthalmaza és az X, Y részhalmazának megfelelő x, y pontok között akkor és csak akkor vezessen él, ha $X \subset Y$ és $|X| + 1 = |Y|$. Mutassuk meg, hogy G_n-ben nincs irányított kör, majd adjuk meg mind maximális számú, mind minimális számú emeletekre való bontását.

9.2.8. Tekintsünk el az előző feladatban szereplő G_n gráfban az élek irányításától.

(a) Határozzuk meg a keletkező irányítatlan gráf éleinek számát!

(b) Mutassuk meg, hogy a gráf páros!

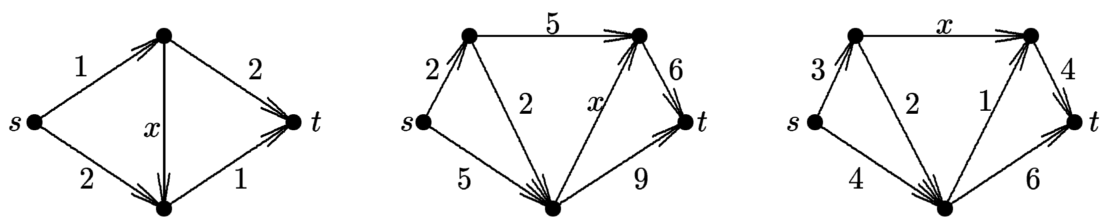
(c) Bizonyítsuk be, hogy van benne teljes párosítás!

9.2.9. * Próbálja meg definiálni egy síkbarajzolható irányított gráf duálisának irányítását. Lehetne-e a gráf is, duálisa is olyan, hogy egyik sem tartalmaz irányított kört?

Pert–módszer

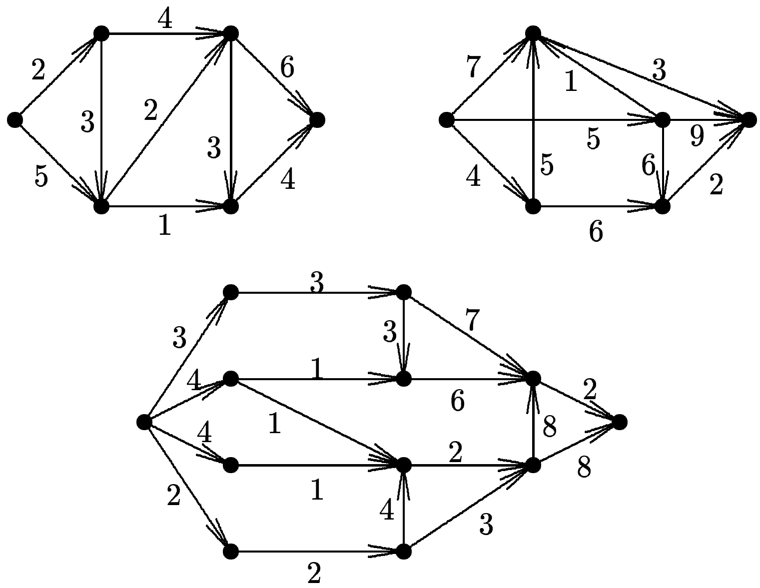
9.3.1. Határozzuk meg a 9.2. ábrán látható gráfok által szemléltetett tevékenységekhez szükséges időt!

9.3.2. Határozzuk meg x függvényében a 9.3. ábrán látható gráfok által szemléltetett tevékenységhez szükséges időt. $(x \geq 0)$

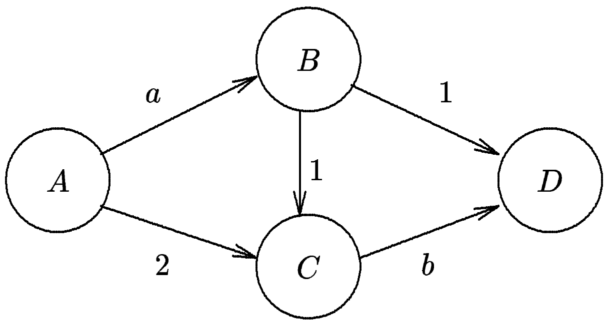


9.3. Ábra

9.3.3. Határozzuk meg (a és b függvényében) a 9.4. ábrán látható gráf által szemléltetett tevékenységhez szükséges időt. $(a, b \geq 0)$



9.2. Ábra



9.4. Ábra

9.3.4. (folyt.) Mely részfeladatok kritikusak?

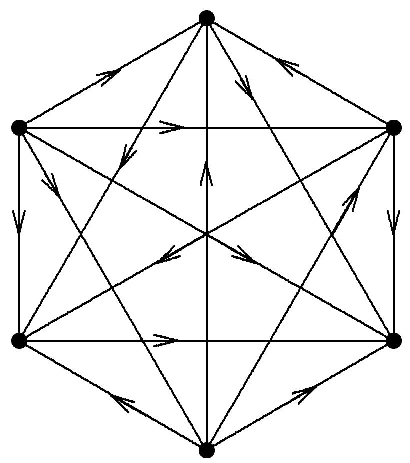
9.3.5. * Ismételjük meg az előző két példát, ha $l(B, D)$ értékét 1-ről 3-ra változtatjuk.

9.3.6. Emeletekre bontható-e a 9.5. ábrán látható irányított gráf?

Gráfok színezése

10.1.1. Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{106}\}$. v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $|i-j| \leq 7$. Mennyi G kromatikus száma, $\chi(G)$?

10.1.2. Legyenek G csúcsai az összes természetes számok és legyen az n és m csúcs éllel összekötve pontosan akkor, ha $n + m$ páratlan. Határozza meg $\chi(G)$-t!



9.5. Ábra

10.1.3. Igaz-e, hogy ha egy G gráf $\chi(G)$ kromatikus számára és $\omega(G)$ klikkszámára teljesül, hogy $\chi(G) > \omega(G)$, akkor behúzhatók G-be új élek úgy, hogy a keletkező G' gráfra $\chi(G) = \chi(G') = \omega(G')$ teljesüljön?

10.1.4. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$, ahol $\alpha(G)$ a G gráf maximális elemszámú független ponthalmazát jelöli!

10.1.5. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfban $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$!

10.1.6. Hagyjuk el egy $2n$ pontú teljes gráfból egy Hamilton–körének éleit! Mennyi a keletkező gráf kromatikus száma? És ha egy $2n+1$ pontú gráfból indulunk ki?

10.1.7. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú G gráfra $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$!

10.1.8. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$!

10.1.9. Legyen a G gráf pontjainak fokszámsorozata $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 1 + \max_i\{\min\{d_i, i-1\}\}$!

10.1.10. Tegyük fel, hogy G minden éle legfeljebb egy körben van benne. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\chi(G) \leq 3$!

10.1.11. Adott a síkon egyenesek egy halmaza, amelyek közül semelyik 3 nem megy át egy ponton. Legyenek a G gráf pontjai az egyenesek metszéspontjai, két ilyen pont akkor szomszédos, ha egy egyenesen szomszédos metszéspontok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 3$!

10.1.12. Egy $G_1 = (V, E_1)$ és $G_2 = (V, E_2)$ gráf uniója a $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$ gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$!

10.1.13. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfnak sorba rendezhetők úgy a pontjai, hogy ha ebben a sorrendben színezzük a gráfot mohó algoritmussal, akkor $\chi(G)$ színt használunk!

Perfekt gráfok

10.2.1. Adjunk olyan nem perfekt gráfot, amelyre $\chi(G) = \omega(G)$!

10.2.2. Lássuk be, hogy egy páratlan kör komplementere nem perfekt!

10.2.3. Egy gráfot **összehasonlítási gráfnak** nevezünk, ha élei tranzitívan irányíthatóak, azaz ha $(x, y) \in E$ és $(y, z) \in E$, akkor $(x, z) \in E$ is teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy az összehasonlítási gráfok perfektek!

10.2.4. Egy G gráf $L(G)$ **élgráfjának** pontjai legyenek a G gráf élei. $L(G)$-ben két pont akkor és csak akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő éleknek G-ben van közös végpontjuk. Bizonyítsuk be, hogy minden G páros gráf $L(G)$ élgráfja perfekt!

10.2.5. Legyen G_1 és G_2 perfekt és tegyük fel, hogy $G_1 \cap G_2$ egy teljes gráf. Lássuk be, hogy $G_1 \cup G_2$ perfekt gráf!

Síkbarajzolható gráfok kromatikus száma

10.3.1. Legyen G egy síkbarajzolható gráf. Milyen értékeket vehet fel a kromatikus száma, $\chi(G)$? (Példákat is mutasson a lehetséges értékekhez!)

10.3.2. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai pontosan akkor színezhetők 2 színnel, ha minden pont foka páros!

10.3.3. Bizonyítsuk be (a 4–szín tétel nélkül), hogy ha egy síkbarajzolható gráfban van Hamilton–kör, akkor tartományai 4–színnel színezhetők!

10.3.4. Adjunk olyan polinomiális algoritmust, ami egy síkbarajzolható gráf pontjait úgy rendezi sorba, hogy ebben a sorrendben a mohó színezés legfeljebb 6 színt használ!

Élkromatikus szám

10.4.1. Mennyi $\chi_e(K_{2n})$ és $\chi_e(K_{2n+1})$?

10.4.2. Mennyi az élkromatikus száma egy r–reguláris páros gráfnak?

10.4.3. Bizonyítsuk be, hogy ha G páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$!

10.4.4. Mennyi a Petersen–gráf (ld. 2.3. ábra) élkromatikus száma?

10.4.5. Bizonyítsuk be, hogy ha G reguláris, de nem 2–szeresen összefüggő, akkor $\chi_e(G) > \Delta(G)$!

NP–beli problémák

11.1.1. Adjunk polinom rendü algoritmust annak eldöntésére, hogy $\alpha(G) \geq 3$ teljesül-e.

11.1.2. Mutassuk meg, hogy a 11.1. Táblázat **2. megjegyzésében** szereplő feladat **NP**–teljes.

11.1.3. Lássuk be, hogy a 11.1. Táblázat **3. megjegyzésében** szereplő feladat **NP**–beli és hogy nem lehet nehezebb, mint a 2. megjegyzésben szereplő.

11.1.4. Vezessük vissza a Hamilton–kör létezésére vonatkozó problémát az adott két pont közötti Hamilton–út létezésére vonatkozó problémára (irányítatlan gráfok körében)!

11.1.5. Vezessük vissza az adott két pont közötti Hamilton–út létezésére vonatkozó problémát a Hamilton–kör létezésére vonatkozó problémára (irányítatlan gráfok körében)!

11.1.6. Vezessük vissza az irányítatlan gráfok Hamilton–körének létezésére vonatkozó problémát az irányított gráfok irányított Hamilton–körének létezésére vonatkozó problémára.

11.1.7. * Vezessük vissza az irányított esetet is az irányítatlanra!

11.1.8. Tegyük fel, hogy van egy E eljárásunk, mely egy tetszőleges G gráfra megmondja, hogy van-e G-nek Hamilton-köre. Vezessük vissza E-re azt a feladatot, hogy G valamelyik Hamilton-körét meg is kell találni.

11.1.9. Legyen $k > 3$. Mutassuk meg, hogy ha lenne olyan polinom rendű algoritmus, mely eldöntené egy gráfról, hogy k színnel színezhető-e, akkor olyan algoritmus is lenne, amely a 3 színnel színezhetőséget döntené el.

11.1.10. Legyen S egy olyan szubrutin, mely tetszőleges n pontú gráfról megmondja, hogy van-e benne $n/2$ db független pont. Készítsünk olyan algoritmust, amely S polinom-számú hívásával talál egy ilyen független ponthalmazt, ha egyáltalán létezik!

11.1.11. Tegyük fel, hogy van egy olyan P programunk, mely egy n szögpontú G irányítatlan gráfról n időegység alatt megmondja, hogy kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezzen olyan P-t használó algoritmust, mely polinom időben megtalálja G egy 3-színezését (ha van ilyen egyáltalán)!

11.1.12. Egy G irányítatlan gráfot 2–lebonthatónak nevezünk, ha ponthalmaza az üres halmazzá redukálható az alábbi lépés ismételt végrehajtásával: „G-ből egy tetszőleges legfeljebb másodfokú pont a csatlakozó élekkel együtt törölhető."' Mutassa meg, hogy a 2–lebontható gráfok polinom időben felismerhetők. Javasoljon továbbá hatékony algoritmust az ilyen gráfok 3 színnel való színezésére!

11.1.13. „Van-e egy gráfban k–pontú teljes részgráf?" Mi ennek a problémának a bonyolultsága, ha k fix? És ha k is része az inputnak?

11.1.14. Tegyük fel, hogy van egy P eljárásunk, mely egy input gráfra 1 költséggel megmondja a gráfban levő maximális klikk(ek) méretét. Tervezzen egy olyan, a P eljárást használó algoritmust, mely polinom időben talál egy maximális klikket az input gráfban!

11.1.15. * Igazoljuk, hogy a „határozza meg egy G gráfban a maximális teljes részgráf méretét" feladat (ld. 11.1.13. is) polinom időben megoldható, ha G egy intervallumgráf (ld. 5.2.3)!

Az alábbi problémáknak határozzuk meg a bonyolultságát!

11.1.16.

Input: G gráf, amelyben nincs Hamilton–kör, és egy K egész szám

Kérdés: Kapható-e G-ből legfeljebb K él hozzávételével olyan gráf, amelyben van Hamilton–kör?

11.1.17.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Létezik-e olyan G-beli kör, ami S minden pontján átmegy?

11.1.18.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Létezik-e olyan G-beli kör, ami $V(G) - S$ minden pontján átmegy?

11.1.19.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Létezik-e olyan G-beli kör, melynek minden pontja S-beli?

11.1.20.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Létezik-e olyan G-beli kör, amely minden S-beli pontot tartalmaz?

11.1.21.

Input: G gráf és K pozitív egész szám

Kérdés: Létezik-e olyan kör, amely minden ponttól legfeljebb K távolságra halad?

11.1.22.

Input : G gráf és $u, v \in V(G)$

Kérdés: Van-e olyan Hamilton-kör G-ben, melyben u és v nem szomszédosak?

11.1.23.

Input: Összefüggő, $n = 5k$ pontú gráf

Kérdés: Van-e G-ben pontosan k hosszú kör?

11.1.24.

Input: Összefüggő, $n = 5k$ pontú gráf

Kérdés: Van-e G-ben legalább k hosszú kör?

11.1.25.

Input: G gráf és $e \in E(G)$

Kérdés: Van-e G-ben olyan kör, mely e-t tartalmazza?

11.1.26.

Input: G gráf és $e \in E(G)$

Kérdés: Van-e G-ben olyan kör, mely e-t nem tartalmazza?

11.1.27.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek elsőfokú pontjainak A halmazára $A = S$?

11.1.28.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek elsőfokú pontjainak A halmazára $A \subseteq S$?

11.1.29.

Input: G gráf és $S \subseteq V(G)$

Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek elsőfokú pontjainak A halmazára $A \supseteq S$?

11.1.30.

Input: G gráf és K pozitív egész szám

Kérdés: Van-e G-ben olyan feszítőfa, melyben a páros fokú pontok száma legalább K?

11.1.31.

Input: G gráf és K pozitív egész szám

Kérdés: Van-e G-ben olyan feszítőfa, melyben a maximális fokszám legfeljebb K?

11.1.32.

Input: G gráf és $x, y \in V(G)$

Kérdés: Kiszínezhetőek-e G pontjai három színnel jól úgy, hogy x és y különböző színű legyen?

11.1.33.

Input: G gráf és $x, y \in V(G)$

Kérdés: Kiszínezhetőek-e G pontjai három színnel jól úgy, hogy x és y azonos színű legyen?

11.1.34.

Input: G gráf és $x, y, z \in V(G)$

Kérdés: Kiszínezhetőek-e G pontjai három színnel jól úgy, hogy x, y és z különböző színű legyen?

11.1.35.

Input: G irányított gráf és K pozitív egész szám

Kérdés: Létezik-e G-nek K olyan pontja, amely szerepel (nem feltétlenül ugyanazon) irányított körben?

11.1.36.

Input: G gráf és K pozitív egész szám

Kérdés: Igaz-e, hogy G átmérője nagyobb K-nál? (Az átmérő a két legtávolabbi pont távolsága, ahol a távolság a legrövidebb út hossza.)

11.1.37.

Input: G gráf

Kérdés: Igaz-e, hogy G bármely két pontján át vezet kör? (Más párokra esetleg más kör.)

11.1.38.

Input: G irányított gráf

Kérdés: Igaz-e, hogy G bármely két pontján át vezet irányított kör?

11.1.39.

Input: $n \times n$-es $0-1$ elemekből álló A mátrix

Kérdés: Kiválasztható-e A-ból n db 1-es úgy, hogy minden sor és minden oszlop pontosan egyet tartalmazzon közülük?

11.1.40.

Input: G gráf, melynek élei $p_1, p_2, \ldots$ valószínűséggel meghibásodó telefonvonalak, $x, y \in V(G)$ és $0 < P < 1$ valós szám

Kérdés: Van-e olyan út x és y között, ami legfeljebb P valószínűséggel hibásodik meg?

Nem polinom rendű algoritmus is lehet jó

11.2.1. Keressünk maximális független ponthalmazt polinom időben olyan gráfokban, melyekben minden pont foka legfeljebb 2!

11.2.2. Jelölje α az $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} = 1$ egyenlet pozitív megoldását ($\alpha \approx 1.381$). Adjunk konstansszor α^n lépésszámú algoritmust, mely n pontú gráfban megtalál egy maximális független ponthalmazt.

11.2.3. Mutassuk meg, hogy a ládapakolási–problémára bemutatott „sietős” algoritmus tényleg legfeljebb 100% hibával dolgozik.

Számelmélet

12.1.1. Számítsuk ki az euklideszi algoritmus segítségével 504 és 372 legnagyobb közös osztóját!

12.1.2. Ha b osztója a-nak, mik a lehetséges értékei a $d(a, a+b)$, és a $d(2a, a-b)$ legnagyobb közös osztóknak?

12.1.3. Az $a_1, a_2, \ldots$ számok relatív prímek, ha nincs olyan egynél nagyobb szám, mely mindegyiknek osztója lenne. Mutasson három olyan relatív prímszámot, melyek közül semelyik kettő nem relatív prím!

12.1.4. Bizonyítsa be, hogy ha $d(a,4) = d(b,4) = 2$ akkor $a+b$ osztható 4-gyel.

12.1.5. Legyen a és b páratlan. Mennyi $d(a^2+b^2,4)$?

12.1.6. Van-e olyan a,b pár, hogy $d(a,b) = 3$ és $a+b = 100$? És olyan, hogy $d(a,b) = 5$ és $a+b = 100$? Ahol igen, ott hányféle?

12.1.7. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan 3 jegyű szám, melynek osztóinak száma osztható volna 11-gyel!

12.1.8. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy $d(n+1) \geq 2d(n)$.

12.1.9. Bizonyítsuk be, hogy minden a,b egészre $d(ab) \leq d(a)d(b)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a és b relatív prímek!

12.1.10. Bizonyítsuk be, hogy minden a egészre $d(a) \leq 2\sqrt{a}$!

12.1.11. Lehet-e, hogy 8 egymást követő prímszám összege is prím?

12.1.12. Két pozitív egész szám összege prím, az egyik a másik 30-szorosa. Mik lehetnek ezek?

12.1.13. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prímszám?

12.1.14. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n prím!

12.1.15. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor n kettőhatvány!

Maradékosztályok

12.2.1. Legyen $2^k = l$. Ha t^l kiszámításához elég l szorzás, akkor a 12.2. szakaszban leírt eljárás alkalmazása miért nem vezetett polinom rendű algoritmushoz a 12.1. szakaszban?

12.2.2. Az $x \equiv 2 \pmod 3$ és az $x \equiv 5 \pmod 6$ állítások közül melyik következik a másikból?

12.2.3. Döntsük el, hogy megoldhatóak-e az alábbi kongruenciák, és a megoldhatókat oldjuk meg:

a) $3x \equiv 5 \pmod 7$,

b) $14x \equiv 8 \pmod{21}$,

c) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,

d) $9x \equiv 24 \pmod{96}$,

e) $ax \equiv 5 \pmod{35}$ ha $a = 5, 6$ vagy 7,

f) $ax \equiv 3 \pmod{21}$ ha $a = 6, 7$ vagy 8,

g) $ax \equiv b \pmod{12}$ ha $a = 4$ vagy 5, $b = 2$ vagy 3.

12.2.4. Néhány veréb röpköd egy fa körül. Ha minden ágra $1-1$ veréb ül, akkor n verébnek nem jut hely, ha viszont n ág üres marad, akkor a többi ágon $n-n$ veréb ül. Hány ág és hány veréb van?

12.2.5. Bizonyítsuk be, hogy $39^{14}-1$ osztható 5-tel!

12.2.6. $(b,c)=1$ és $b-c$ osztható 5-tel. Bizonyítsuk be, hogy $(b+c, 2b+7c)=1$ teljesül!

12.2.7. Keressük meg 7 azon pozitív többszöröseit, melyek 13-mal osztva 11-et adnak maradékul!

12.2.8. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Melyik ez a maradék?

12.2.9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges prímre $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$!

12.2.10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges prímre $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$!

12.2.11. Mi lehet a, ha $a^{1993} \equiv 5 \pmod{21}$?

12.2.12. Milyen maradékot ad 13-mal osztva 42^{600}?

12.2.13. Milyen maradékot ad 99-cel osztva 1996^{659}?

12.2.14. Milyen maradékot ad 103-mal osztva $205^{206^{207}}$?

12.2.15. Milyen maradékot ad 10-zel osztva $7^{6^{5^{4^{3^{2}}}}}$?

12.2.16. Mennyi x?

a) $5^{1997} \equiv x \pmod{17}$,

b) $49^{49} \equiv x \pmod{15}$,

c) $108^{182} \equiv x \pmod{19}$,

d) $x^{11999} \equiv 5 \pmod{13}$.

12.2.17. Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám nem osztható 17-tel, akkor n^8-1 vagy n^8+1 osztható 17-tel!

12.2.18. Bizonyítsuk be, hogy $n^{11}+10n$ osztható 11-gyel, ha n tetszőleges egész szám!

12.2.19. Bizonyítsuk be, hogy n^7-n osztható 42-vel, ha n tetszőleges egész szám!

12.2.20. Milyen maradékot ad 37-tel osztva az a szám aminek 10-es számrendszerbeli alakja 37 db egyesből áll?

12.2.21. Legyen p prím, n pozitív egész, hogy $p \mid (10n-1)$. Bizonyítsuk be, hogy $10^{p-2} \equiv n \pmod{p}$!

12.2.22. * Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges egész szám, p tetszőleges prímszám, akkor $n^{p^p} - n$ osztható p-vel!

12.2.23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ esetén $\varphi(n) = n \cdot \prod \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, ahol a produktum-képzés az n szám minden p_i prímosztójára értendő.

12.2.24. (folyt.) Mutassuk meg, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

12.2.25. Mutassuk meg, hogy $\varphi(p^2) = p(p-1)$.

12.2.26. Milyen n-ekre teljesül $2\varphi(n) = n$?

12.2.27. Milyen n-ekre teljesül $\varphi(7n) = 7\varphi(n)$?

Prímtesztelés

12.3.1. Bizonyítsa be, hogy 561 Carmichael szám (segítségül: prímtényezős felbontása $3 \cdot 11 \cdot 17$)!

Titkosírás

13.1.1. A hajó árbocainak számát, a kapitány életkorát és gyermekeinek számát összeszorozva 258-at kaptunk. Hány éves a kapitány?

13.1.2. A páros számok is gyűrűt alkotnak, ebben pl. 6 vagy 18 is „prímszám”, mert nem bontható kisebb páros számok szorzatára. Példán mutassuk meg, hogy ebben a gyűrűben nem teljesül a számelmélet alaptétele.

13.1.3. Bizonyítsuk be, hogy ha $ab = k^n$ (a, b, k és n természetes számok) és $d(a, b) = 1$, akkor a és b is természetes számok n-edik hatványai!

13.1.4. Hogyan lehet két természetes szám kanonikus alakjának ismeretében legnagyobb közös osztójuk, ill. legkisebb közös többszörösük kanonikus alakját előállítani?

13.1.5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges két a, b szám $d(a, b)$ legnagyobb közös osztójára és $m(a, b)$ legkisebb közös többszörösére $d(a, b) \cdot m(a, b) = a \cdot b$.

Kódolás és dekódolás

13.2.1. Aliz és Béla telefonon keresztül sakkoznak. Ha a játszma függőben marad és mondjuk Aliz következik, az utolsó lépést „borítékolnia” kell. (Ha nem tennék, akkor valamelyiküknek egy extra nap gondolkodási ideje lenne.) Hogyan lehet „borítékolni” telefonon keresztül? (Egyrészt Béla nem tudhatja másnapig, hogy mi a lépés. Másrészt Aliz közben rájöhetne, hogy mást kellett volna lépnie, ezért Béla másnap egy Aliztól kapott újabb információval már „ki tudja nyitni” a borítékot.) (Segítség: Tetszőleges négyjegyű szám folytatható alkalmas 196 további jeggyel úgy, hogy egy 200 jegyű prímhez jussunk.)

13.2.2. A titkosírással kommunikáló szereplők egyetlen közös prímet választanak. Mindenki egy–egy $p-1$-hez relatív prím e_i számot választ és az $e_i x \equiv 1 \pmod{p-1}$ kongruencia egyetlen megoldását d_i-vel jelöli. (Most persze az i-edik résztvevő d_i-t és e_i-t is titokban tartja.) Az $y = C_i(x)$ kódolófüggvény legyen $y \equiv x^{e_i} \pmod{p}$ és a $z = D_i(y)$ dekódolófüggvény most legyen $z \equiv y^{d_i} \pmod{p}$

a) Mutassuk meg, hogy most is teljesül minden i-re $D_i(C_i(x)) \equiv x \pmod{p}$!

b) Mutassuk meg, hogy most minden i, j párra $C_i(C_j(x)) \equiv C_j(C_i(x)) \pmod{p}$ is teljesül.

13.2.3. Fehérkém 5 titkos információval rendelkezik, amelyek közül az egyiket szívesen eladná Feketekémnek. Az információkat Fehérkém egy–egy borítékban tartja, mindre fel van írva miről szól. Feketekém az egyik borítékot szívesen megvenné, de fél, hogy másnap Fehérkém már 6 borítékot árulna, az utolsót azzal a felirattal, hogy „Mi érdekli Feketekémet?”. Ajánljunk nekik olyan eljárást, mellyel Feketekém hozzájut pontosan egy boríték tartalmához, de Fehérkém nem tudja, melyikhez!

Bizonyítás információközlés nélkül

13.4.1. Tegyük fel, hogy heti 5 nap, napi 8 órában ötpercenként kiszolgálnak ügyfeleket a 13.4. szakaszban leírt képzeletbeli „bankokban” és tegyük fel, hogy a világon 10^8 ilyen bankfiók működik. Mennyi idő alatt végeznek 2^{100} ügyféllel (tehát mennyi idő alatt várható, hogy valaki jogosulatlanul jut pénzhez)?

Csoportok

14.1.1. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található n elemű csoport és hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy az n elemű csoportok izomorfak!

14.1.2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoportban minden elem rendje 2, akkor G kommutatív csoport!

14.1.3. Legyen G kommutatív csoport és az $a, b \in G$ elemek rendje legyen $o(a) = n, o(b) = k$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $o(ab)$ osztja n és k legkisebb közös többszörösét!

14.1.4. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész számhoz létezik olyan véges csoport, melynek pontosan k db valódi részcsoportja van!

14.1.5. Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport minden részcsoportja normálosztó!

14.1.6. Hány normális részcsoportja (normálosztója) van a 15 rendű ciklikus csoportnak?

14.1.7. Legyen G egy legalább kételemű véges csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan eleme, melynek rendje prímszám!

14.1.8. Bizonyítsuk be, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha részcsoportjainak száma véges!

14.1.9. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, melynek 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív!

14.1.10. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot, melyben a műveletet összeadásnak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az összes elem összege 0 !

14.1.11. Jelölje $(G_1, *)$ és $(G_2, *)$ a $(G, *)$ csoport két különböző részcsoportját. ($*$ a művelet.) Igaz-e, hogy $(G_1 \cup G_2, *)$ is részcsoport?

14.1.12. Egy leképezés egy csoport minden eleméhez az illető elem inverzét rendeli. Bizonyítsuk be, hogy ez a leképezés akkor és csak akkor homomorfizmus, ha a csoport kommutatív!

Gyűrűk, testek, hálók

15.1.13. Egy $x \neq 0$ gyűrűelem baloldali nullosztó, ha van olyan $y \neq 0$, melyre $xy = 0$. Legyen x_1 és x_2 baloldali nullosztó. Bizonyítsuk be, hogy x_1x_2 is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!

15.1.14. Bizonyítsuk be, hogy kommutatív testben minden elemnek legfeljebb két különböző négyzetgyöke lehet! Igaz-e ez nem kommutatív testben?

15.1.15. Melyik az a legkisebb természetes szám, melynek osztóhálója izomorf a 8-elemű Boole-algebrával?

15.1.16. Milyen hálóra igaz, hogy tetszőleges nemüres részhalmazát tekintve ismét hálót kapunk?

15.1.17. Boole-algebrát alkotnak-e a halmazalgebra szokásos műveleteire nézve a természetes számok halmazának azon H részhalmazai, melyekre igaz, hogy H vagy a komplementere véges?

15.1.18. Legyen B az E halmaz összes részhalmazának Boole-algebrája. Adja meg az összes olyan $a \in B$ elemet, melyekre minden $b \in B$ esetén igaz, hogy ha $a \wedge b \neq 0$ akkor $a \leq b$!

Minta zárthelyik

1. Zárthelyi

1. Egy budapesti, egy vidéki és egy külföldi barátunknak szeretnénk két–két képeslapot küldeni úgy, hogy egyikük se kapjon két egyforma lapot. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a boltban, ahol vásárolunk, összesen ötféle képeslap kapható?
2. Hányféleképp juthatunk el a 3-dimenziós koordinátarendszer $(0,0,0)$ pontjából a (k,l,m) pontjába $(k,l,m \geq 0)$, ha minden lépésben valamely tengellyel párhuzamosan lépünk egy egységnyit pozitív irányban?
3. Az n hosszúságú $0-1$ sorozatoknak feleltessünk meg gráfpontokat, melyek közül kettő pontosan akkor legyen egy éllel összekötve, ha a két sorozat pontosan egy koordinátájában tér el egymástól. Az így kapott gráfból legalább hány élt kell elhagyjunk, hogy körmentessé váljon?
4. Legalább hány élt kell hozzáadni a Petersen–gráfhoz, hogy a keletkező gráfban legyen Euler–kör?
5. A G egyszerű irányítatlan gráfnak 6 pontja és 12 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van G-ben Hamilton–kör! Igaz-e ez akkor is, ha csak 11 éle van?
6. A G gráfban bármely két pont között vezet legfeljebb két élből álló út. Milyen hosszú lehet a gráf legrövidebb köre? Adjunk pontos felső korlátot!
7. Egy F fa Prüfer–kódja csupa különböző számból áll. Hogy jellemezhetjük F-et?
8. Igaz-e a következő állítás?

   Ha egy G gráf $\chi(G)$ kromatikus számára és $\omega(G)$ klikk–számára teljesül, hogy $\chi(G) > \omega(G)$, akkor behúzhatók G-be új élek úgy, hogy a keletkező G' gráfra $\chi(G) = \chi(G') = \omega(G')$ teljesüljön?

2. Zárthelyi

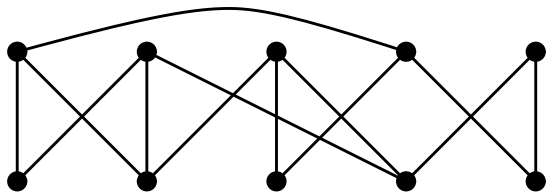
1. Hány olyan hétjegyű telefonszám készíthető, melyekben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám? (Figyelem! A 0 és az 1 nem prímszámok!)
2. Egy G gráf különböző feszítőfáinak száma 3. Hány éle van G-nek?
3. Egy $G = (A, B)$ páros gráfban létezik olyan $X \subseteq A$ ponthalmaz, amelyre $|N(X)| \geq |X| - 2$. Mutassuk meg, hogy G biztosan nem tartalmaz Hamilton-utat!
4. Egy konvex test lapjai szabályos ötszögek és szabályos hatszögek. A testnek 60 csúcsa van és minden csúcs két hatszöglap és egy ötszöglap találkozásánál helyezkedik el. (Gondoljunk a futball labdára!) Hány lapja van ennek a testnek és ezek közül hány ötszög és hány hatszög?
5. Egy $2n$ szögpontú teljes gráfból elhagytuk egy Hamilton-kör éleit. Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?
6. Mi a bonyolultsága a következő problémának?
   Bemenet: egy G gráf és egy k természetes szám
   Kérdés: Igaz-e, hogy G átmérője nagyobb k-nál?
   (Egy G gráf átmérője két legtávolabbi pontjának távolsága, ahol a távolság a két pont közötti legrövidebb út hosszát jelenti.)
7. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan háromjegyű szám, melynek osztóinak száma osztható volna 11-gyel!
8. Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport minden részcsoportja normálosztó!

3. Zárthelyi

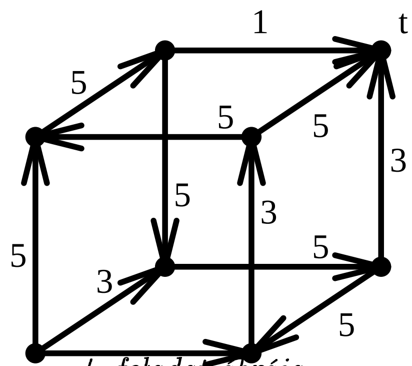
1. Bizonyítsa be, hogy minden $n \geq 1$ egészre

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

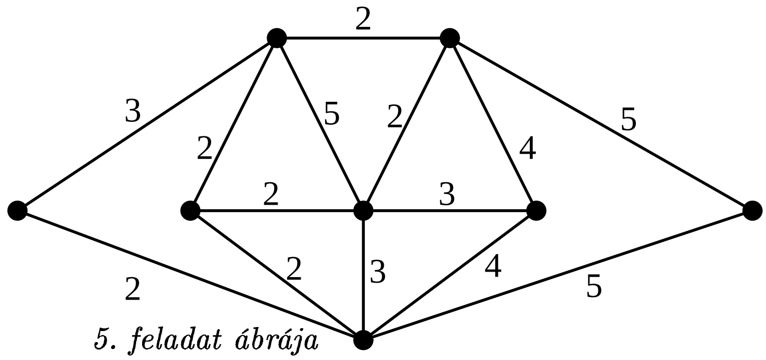
2. Igaz-e, hogy az ábrán látható gráf páros gráf?



3. Bizonyítsa be, hogy minden 4-nél több pontot tartalmazó egyszerű gráfban vagy a komplementerében van kör!
4. Mekkora a maximális folyam értéke az ábrán látható hálózatban s-ből t-be?



4. feladat ábrája

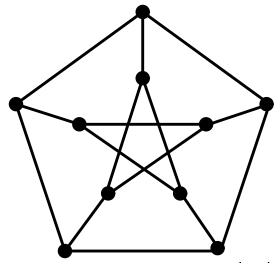


5. feladat ábrája

5. Hány különböző minimális súlyú feszítőfa van az ábrán látható gráfban?
6. Adott egy egyszerű összefüggő gráf, amelynek minden éle kékre vagy pirosra van színezve. Adjunk olyan eljárást, amely megtalál egy olyan feszítőfát, amely legalább 2 kék élet tartalmaz vagy megmutatja, hogy nincs ilyen fa.
7. Megoldható-e a $17x \equiv 11 \pmod{19}$ kongruencia? Ha igen, akkor oldja meg!
8. Legyen G egy csoport, N normálosztó ($N \triangleleft G$), H pedig részcsoport G-ben ($H \leq G$). Bizonyítsa be, hogy NH részcsoport G-ben ($NH \leq G$)!

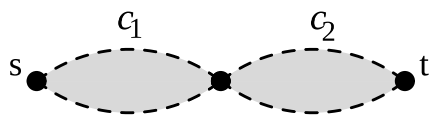
4. Zárthelyi

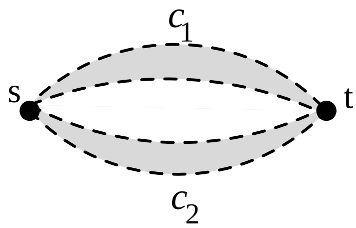
1. Egy fogadóiroda gyűjtőládájába 10 kitöltött lottószelvény van bedobva (90 számból 5 be van jelölve). Hányféle lehet a kitöltésüket figyelembe véve ez a 10 szelvényből álló halmaz? (Két szelvény egyforma, ha ugyanazok a számok vannak rajtuk bejelölve.)
2. Legyen T a Petersen–gráf (ld. az ábrán) egy feszítőfája és jelölje $l(T)$ ennek a leghosszabb útjának hosszát. (Egy út hossza a benne szereplő élek száma.) Adjunk olyan



feszítőfát, amelyre $l(T) = 4$ és olyat is amelyre $l(T) = 9$!

3. Legyen e a G gráf egy olyan éle, melyet elhagyva G egy k és egy l pontú komponensre esik szét. Bizonyítsa be, hogy ha G-nek van az e élet tartalmazó teljes párosítása, akkor kl páratlan szám!
4. Adott két hálózati folyam, melyekben a minimális vágás értéke c_1 illetve c_2. Mekkora lesz a maximális folyam értéke abban a hálózati folyamban, amit a két folyam soros, illetve párhuzamos egymáshoz kapcsolásával kapunk?





5. Egy irányított gráf ponthalmaza V. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{v \in V} |d_{\text{ki}}(v) - d_{\text{be}}(v)|$$

páros szám! (Itt $d_{\text{ki}}(v)$, ill. $d_{\text{be}}(v)$ a v-ből kimenő, ill. v-be bemenő élek számát jelöli.)

6. Mi a bonyolultsága a következő problémának: Adott egy G gráf és egy l természetes szám. Van-e G-ben két teljes l-es részgráf (K_l), amelyeknek pontosan egy közös pontjuk van?
7. Mi 2003^{42} utolsó két számjegye?
8. Bizonyítsa be, hogy ha a G csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje ugyanaz, akkor ez a rend prímszám!

Megoldások a minta zárthelyikhez

1. Zárthelyi

1. Budapesti barátunknak az ötféle képeslapból $\binom{5}{2}$–féleképp választhatunk két különbözőt. Ugyanez áll vidéki és külföldi ismerősünkre is és bármit is választunk egyik barátunknak, a másiknak akkor is $\binom{5}{2}$-féleképp választhatunk. Így az összes lehetőségek száma $\binom{5}{2}^3$.
2. A feltételekből világos, hogy k lépést kell tennünk az x tengellyel párhuzamosan, l-et y-nal és m-et z-vel. Elég tehát mindig feljegyezni, hogy pl. a 13-ik lépésben az x tengellyel párhuzamosan léptünk. Látható tehát, hogy annyiféleképp juthatunk el (k, l, m)-be, ahány különböző sorozat létezik k db x-ből, l db y-ból és m db z-ből. Ezek pedig éppen $k + l + m$ elem ismétléses permutációi, melyeknek száma
$$\frac{(k+l+m)!}{k! \cdot l! \cdot m!} = \binom{k+l+m}{k}\binom{l+m}{l}.$$
3. A gráfnak nyilván $v = 2^n$ pontja van. Minden pontnak pontosan n szomszédja van (egy-egy koordinátát 0-ról 1-re vagy 1-ről 0-ra változtatva kapunk egy szomszédot). Mivel az élek száma a fokszámok összegének fele, a gráfnak $e = \frac{n2^n}{2} = n2^{n-1}$ éle van. Egy v pontú körmentes gráfban legfeljebb $v - 1$ él lehet, ezért legalább $e - v + 1 = (n-2)2^{n-1} + 1$ élet kell elhagyni.
4. Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler–kör, ha minden pont foka páros. A Petersen gráfban mind a 10 pont foka 3, vagyis páratlan. Egy él hozzáadásával pontosan két pont foka nő eggyel. Ha tehát mindig két páratlan fokú pontot kötünk össze egy új éllel, akkor éppen 5 élet kell behúznunk. Kevesebb nyilván nem lehet elég.
5. A 6 pontú teljes gráfnak 15 éle van, így G-ben éppen 3 él nincs behúzva. Belátjuk,

hogy G-re teljesül az Ore–feltétel. Legyen u és v két nem szomszédos pont G-ben. Az (u, v) élen kívül még két él hiányzik, így $d(u) + d(v) \geq 4 + 4 - 2 = 6 \geq n$. Tehát Ore tétele szerint létezik Hamilton–kör G-ben.

Van olyan 6 pontú gráf, aminek 11 éle van és nincs benne Hamilton–kör. Ha a 6 pontú teljes gráfból elhagyunk 4 olyan élet, ami egy pontból vezet ki, akkor ennek a pontnak a foka 1 lesz, így a maradék gráfban nyilván nem lehet Hamilton-kör.

6. Ha a gráf önmaga egy 5 hosszú kör, akkor erre teljesül a feltétel és a legrövidebb kör nyilván 5 hosszú. Az viszont nem lehetséges, hogy a legrövidebb kör hossza 6 legyen. Legyenek a legrövidebb kör pontjai sorrendben $v_1, \ldots, v_k$. Ha van él a kör két nem szomszédos pontja között (pl. $\{v_1, v_3\}$), akkor volna k-nál rövidebb kör is a gráfban (pl. $(v_1, v_3, v_4, \ldots, v_k)$). Másrészt a feltétel szerint van egy legfeljebb 2 hosszú út v_1 és v_4 között, azaz van olyan u pont (az előbbiek szerint a kör pontjaitól különböző pont), hogy $\{v_1, u\}$ és $\{u, v_4\}$ is éle a gráfnak. Ekkor viszont feltevésünknek ellentmondva van egy $k - 1$ hosszú kör is a gráfban: $(v_1, u, v_4, v_5, \ldots, v_k)$.
7. F csak egy út lehet. Nyilván összefüggő és ha lenne ≥ 3 fokú pontja, akkor annak a sorszáma legalább 2-szer szerepelne a Prüfer–kódban.
8. Igaz. Legyen $V_1, V_2, \ldots, V_{\chi(G)}$ az első, második, ..., $\chi(G)$-edik színnel színezett pontok halmaza G-nek egy $\chi(G)$ színnel való színezésénél. Húzzuk be az összes olyan élet, ami egy V_i és egy V_j-beli pontot köt össze ha $i \neq j$. Az így kapott G'-nek az eredeti színezés továbbra is jó színezése, tehát $\chi(G') = \chi(G)$. Másrészt, ha minden V_i halmazból választunk egy pontot, akkor ezek G'-ben egy teljes részgráfot alkotnak, vagyis $\omega(G') = \chi(G)$.

2. Zárthelyi

1. A két szomszédos jegy szorzata csak akkor lesz prím, ha az egyik 1, a másik 2, 3, 5 vagy 7. A feltétel csak akkor fog tehát teljesülni, ha vagy az első, harmadik, ötödik és hetedik helyek mindegyikén 1 áll és a többi helyen egy prímszám, vagy a második, negyedik és hatodik helyen áll 1 és a többi helyen prím. Az első eset 4^3-féleképp állhat elő, a második 4^4-féleképp, hiszen három, ill. négy hely mindegyikére választhatunk a

$2, 3, 5, 7$ számok közül, egymástól függetlenül. Az össze lehetőségek száma tehát 4^3+4^4.

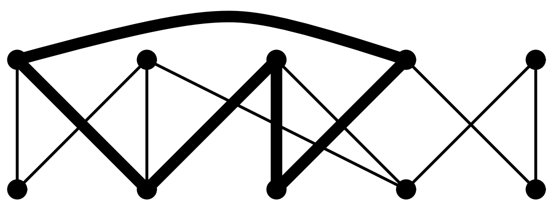
2. G nyilván összefüggő és nem egy fa, hiszen ekkor feszítőfáinak száma 0 vagy 1 lenne. Válasszuk ki G egy tetszőleges F feszítőfáját és vegyük hozzá G-nek egy olyan e élét, ami nem szerepel ebben a fában. Az így kapott gráf pontosan 1 db kört fog tartalmazni, ami egyébként tartalmazza e-t is. Ha ez a kör legalább 4 hosszú, akkor a kör bármely élét elhagyva egy-egy különböző feszítőfát kapunk. Vagyis ez a kör csak 3 hosszú lehet, ekkor F-en kívül még két másik feszítőfa van, mindkettő tartalmazza e-t. Ha volna másik f él $E(G) - E(F) - e$-ben, akkor F-hez f-et hozzávéve és a keletkezett kör egyik élét olyan feszítőfát kapnánk, ami tartalmazza f-et de nem tartalmazza e-t. Ez különbözne az előbbi 3 feszítőfától. Tehát nem lehet ilyen él, vagyis G-nek eggyel több éle van mint a feszítőfának, vagyis az n pontú G gráfnak n-éle van.
3. Tegyük fel, hogy van G-ben Hamilton-út. Vegyük a Hamilton-út első, harmadik, ötödik, stb. élét. Ezek definíció szerint független élek, $\frac{|A|+|B|}{2}$ vagy $\frac{|A|+|B|-1}{2}$ van belőlük és mindegyik lefed egy A-beli pontot. Így vagy minden A-beli, vagy egy kivételével minden A-beli pontot lefedő párosítást kaptunk. Ilyen azonban nem létezhet, ha $|N(X)| \geq |X| - 2$, hiszen egy kivételével minden X-belinek lenne különböző szomszédja.
4. Az élek száma a fokszámok összegének a fele. Ebben a gráfban minden pont foka 3, így $e = \frac{3n}{2} = 90$. Euler formulája szerint $n - e + t = 2$, ezért $t = 92 - 60 = 32$. Ha k-val jelöljük az ötszöglapok számát, akkor $5k + 6(t - k) = 2e$, hiszen minden él két lap határán van rajta. Ebből $5k + 6 \cdot 32 - 6k = 2 \cdot 90$, tehát $k = 6 \cdot 32 - 2 \cdot 90 = 12$. Tehát 12 ötszög és 20 hatszög van a 32 lap között.
5. Jelöljük a csúcsokat a Hamilton-kör szerint sorban $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$-nel. Nyilvánvaló, hogy $v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2n-1}$ egy n pontú teljes részgráfja a gráfnak. Ezért $\chi(G) \geq n$. Másrészt ha v_{2i-1}-et és v_{2i}-t egyaránt az i-edik színnel színezzük $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a gráfot n színnel jól kiszíneztük, hiszen ezek a párok nem élei a gráfnak. Tehát $\chi(G) \leq n$ és így $\chi(G) = n$.
6. A feladat **P**-beli. A BFS algoritmus segítségével cn^2 idő alatt meg tudjuk határozni egy kiválasztott pont távolságát a többi ponttól. Ha ezt minden pontra megtesszük, akkor cn^3 idő alatt rendelkezésre áll bármely két pont távolsága. Ezek közül $\log \binom{n}{2}$

idő alatt ki tudjuk választani a legnagyobbat és eldönteni, hogy ez nagyobb-e k-nál.

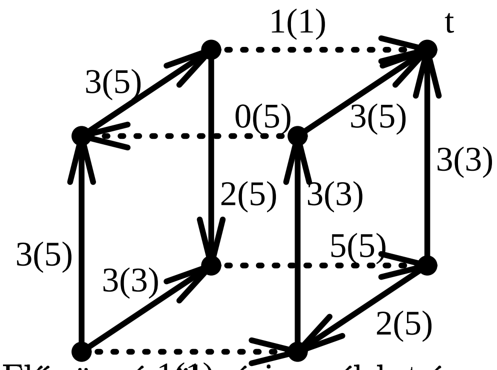
7. Ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor az osztók száma $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$. Mivel a 11 prím, ezért valamelyik $(\alpha_i + 1)$-nek oszthatónak kell lennie 11-gyel, vagyis $\alpha_i \geq 10$. Viszont ekkor nyilvánvaló, hogy $n \geq 2^{10} = 1024$, vagyis n nem lehet háromjegyű.
8. A ciklikus csoport kommutatív, így minden N részcsoportra és g elemre teljesül $Ng = gN$, azaz N normálosztó.

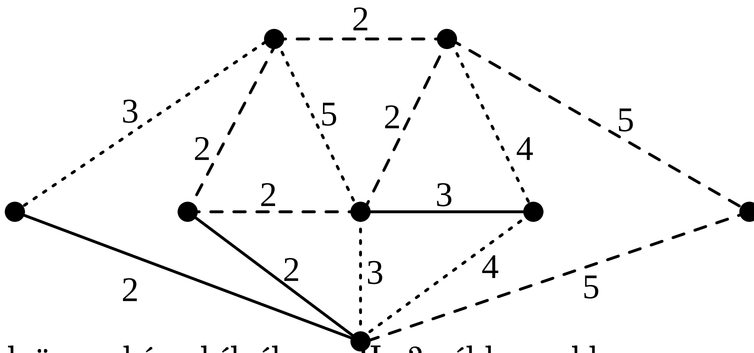
3. Zárthelyi

1. Számoljuk össze hányféleképpen lehet $2n$ különböző tárgyból n darabot kiválasztani. Tudjuk, hogy ezt $\binom{2n}{n}$ módon lehet megtenni. Most tegyük fel, hogy pontosan n tárgy pirosra van festve. Csoportosítsuk az eseteket aszerint, hogy hány pirosat választottunk. Éppen
$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$
esetben választottunk pontosan k pirosat. Ezt minden k-ra összegezve ugyanazt kell kapnunk, mint az első esetben.
2. Nem páros, mert van benne páratlan hosszú kör.



3. Tegyük fel, hogy sem G-ben sem $\overline{G}$-ben nincs kör. Ekkor G-ben és $\overline{G}$-ben is legfeljebb $n-1$ él lehet (n a gráf pontjainak száma). Tudjuk azonban, hogy $|E(G)| + |E(\overline{G})| = n(n-1)/2$. Viszont ez $n > 4$ esetén nagyobb mint $2n-2$, ami ellentmondás.
4. Az ábrán látható egy 7 értékű folyam és egy 7 értékű vágás. A Ford–Fulkerson tétel miatt tehát a maximális folyamérték 7.
5. Először majdnem az összes 2 súlyút ki kell választani. A 2 súlyúak közül 4 kört alkot, így 4-féleképpen lehet ezek közül 3-at választani. Utána egy lehetőség van egy 3 súlyú kiválasztására, 4-est nem választhatunk, végül a két 5-ös közül az egyik kell. Összesen 8 minimális súlyú fa van.





6. Először nézzük végig az éleket és számoljuk össze, hány kék él van. Ha 2-nél kevesebb kék él van, akkor biztosan nincs ilyen feszítőfa. Ha viszont legalább 2 van, akkor a következő algoritmussal konstruálhatunk meg egy ilyet. Válasszunk ki két tetszőleges kék élet, majd a továbbiakban egyesével választunk tetszőleges éleket, amelyek nem alkotnak kört az előtte kiválasztottakkal, amíg feszítőfát nem kapunk, azaz amíg $n-1$ élet kiválasztottunk.
7. Mivel $d(17,19)=1$, pontosan egy 19-nél kisebb megoldás van. $17x \equiv (-2)x \equiv (-8) \equiv 11 \pmod{19}$. Tehát a megoldás a 4. (Az összes megoldás a $4+19k$ alakú számok.)
8. Legyen $n_1, n_2 \in N$ és $h_1, h_2 \in H$. Azt kell belátnunk, hogy az inverz és a művelet nem vezet ki NH-ból, vagyis, hogy $(n_1h_1)^{-1} \in NH$ és $n_1h_1n_2h_2 \in NH$. $(n_1h_1)^{-1} = h_1^{-1}n_1^{-1} = h_3n_3$. Mivel N normálosztó, $h_3n_3 = n_4h_3 \in NH$ alkalmas $n_4 \in N$-el. Ugyanezért $n_1(h_1n_2)h_2 = n_1(n_5h_1)h_2 = (n_1n_5)(h_1h_2) \in NH$, hiszen N és H is részcsoport.

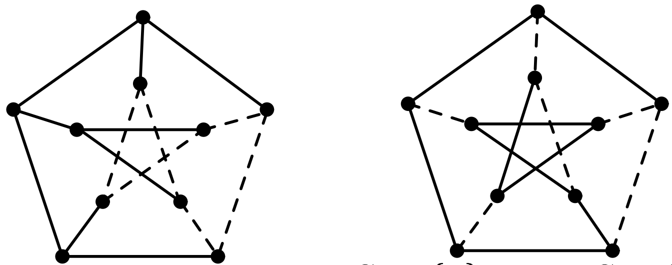
4. Zárthelyi

1. $\binom{90}{5}$–féleképp lehet kitölteni egy lottószelvényt. Ismétléses kombinációval a megoldás így

$$\binom{\binom{90}{5}+10-1}{10} =$$

$$= 740890237577052982032141608999357312165771737706808195371209039727361 0.$$

2. Az ábrán láthatók a keresett feszítőfák.
3. Legyen G_k és G_l az e él elhagyásával keletkező két komponens. Legyen $(x,y)=e$ úgy, hogy x pontja G_k-nek és y pontja G_l-nak. Ha van e-t tartalmazó teljes párosítás,



akkor ez megad egyben egy teljes párosítást $G_k - \{x\}$-ben és $G_l - \{y\}$-ban is. Ekkor ezek pontszáma páros, így k és l páratlan, amiből következik, hogy kl is páratlan.

4. A soros kötés esetén a maximális folyam értéke $\min(c_1, c_2)$. Ilyen értékű vágás nyilván van (ha c_1 a kisebb, akkor az első folyam egy minimális vágása), ha pedig volna kisebb vágás, akkor ez az egyik folyamnak volna a minimálisnál kisebb vágása. A Ford–Fulkerson tételből így már következik az állítás. A párhuzamos kötésnél a maximális folyamérték $c_1 + c_2$. Ilyen értékű vágás nyilván van (a két minimális vágás uniója), ha pedig volna kisebb vágás, akkor ez legalább az egyik folyamban a minimálisnál kisebb vágást adna. Ismét a Ford–Fulkerson tételből következik az állítás.
5. $|d_{\mathrm{ki}}(v) - d_{\mathrm{be}}(v)|$ pontosan akkor páros, amikor $|d_{\mathrm{ki}}(v) + d_{\mathrm{be}}(v)|$. Így elég azt belátni, hogy
$$\sum_{v \in V} |d_{\mathrm{ki}}(v) + d_{\mathrm{be}}(v)|$$
páros. Ez viszont nyilván az (irányított) élek számának kétszerese, ami páros.
6. A probléma triviálisan **NP**-beli, ha adott a két l-es ponthalmaz, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy kielégítik-e a feltételeket. Belátjuk, hogy **NP**-teljes. Vezessük vissza rá a klikk problémát. Ha kapunk egy G gráfot és egy l számot, és el kell döntenünk, hogy van-e ebben a gráfban teljes l-es, akkor konstruáljuk meg a G_v gráfot úgy, hogy G-nek a v csúcsához csatoljunk egy teljes l-es gráfot úgy, hogy G-nek és a teljes l-esnek egyetlen közös pontja legyen, a v. Minden $v \in V(G)$-re nézzük meg, hogy van-e G_v-ben két K_l-es részgráf, amelyeknek egy közös pontja van. Könnyen látható, hogy akkor és csak akkor van G-ben teljes l-es, ha valamelyik v-re lesz ilyen G_v-ben.
7. Tudjuk, hogy $\phi(100) = 100\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$. Az Euler–Fermat tétel alapján, mivel $d(2003, 100) = 1$,
$$2003^{40} \equiv 1 \pmod{100},$$
$$2003^{42} \equiv 2003^2 \equiv 3^2 = 9 \pmod{100}.$$

Tehát az utolsó két jegy 09.

8. Tegyük fel, hogy minden elem rendje n, és k valódi osztója n-nek, $kl = n$. Ekkor a^l rendje legfeljebb $k < n$, hiszen $(a^l)^k = a^n = e$.