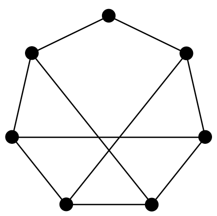
Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Kilencedik gyakorlat, 2024. április 16.

1. Mennyi az alábbi gráf élkromatikus száma?



2. Egy tíznapos üdülés szervezője az üdülés mind a tíz napjára felajánl tizenhat lehetséges program közül pontosan ötöt. Ugyanazt a programot soha nem ajánlja fel két egymást követő napra. Mutassuk meg, hogy biztosan kiválasztható minden napra az aznapra felajánlott programok egyike úgy, hogy a tíz napra tíz különböző programot válasszunk ki. (ZH, 2010. május 18.)

---

3. 64 kockacukorból építettünk egy $(4\times4\times4)$-es nagyobb kockát (amelynek tehát az élhosszúsága 4 kockacukornyi). A G gráf csúcsai legyenek a kockacukrok, két különböző csúcs pedig akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két kockacukor közös lap mentén szomszédosak az építményben. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, vagyis a G élkromatikus számát. (ZH, 2011. március 17.)

4. Egy szigeten n törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi minisztérium felosztja a szigetet n egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Így minden törzs kap egy parcellát földművelés, egyet pedig vadászat céljából. Bizonyítsuk be, hogy a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része.

5. Egy 5 csúcsú teljes gráf egy Hamilton-körének az éleit helyettesítsük két-két párhuzamos éllel. Határozzuk meg az így kapott (5 csúcsú és 15 élű) G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát. (ZH, 2022. június 1.)

6. Mutassuk meg, hogy ha G 9 csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G)+\chi_e(\overline{G})\geq 9$. (ZH, 2015. május 4.)

7. A kilenc csúcsú G egyszerű gráfban öt csúcs foka 4, a maradék négy csúcs foka 3. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának értékét.

---

8. Határozzuk meg az alábbi gráfok élkromatikus számát.
a) A 2023 csúcsú teljes gráf. b) A 2024 csúcsú teljes gráf.

9. a) A $G=(A,B;E)$ páros gráf mindkét pontosztálya 10 csúcsú (vagyis $|A|=|B|=10$). A gráf minden e éléhez tartozik egy adott $w(e)\geq 0$ nemnegatív súly. Tudjuk, hogy a gráf minden v csúcsára teljesül, hogy a v-re illeszkedő élek összsúlya legalább 8 és legföljebb 9 (és így v-re illeszkedik legalább egy él). Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás. (ZH, 2022. május 5.)

b*) Cseréljük ki ebben a feladatban a „ legalább 8 és legföljebb 9” feltételt arra, hogy „ legalább 8 és legföljebb p”, ahol $p\geq 9$ valós paraméter. A p milyen értékeire marad igaz a feladat állítása?

10. A 200 csúcsú G gráf két, közös csúcsot nem tartalmazó 100 pontú körből keletkezett úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával (egy-egy éllel). Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát. (ZH, 2018. május 23.)

11. Mutassuk meg, hogy $\nu(G)\geq \frac{e}{\Delta(G)+1}$ teljesül minden e élű G egyszerű gráfra. (ZH, 2005. május 9.)

12. Igazak-e az alábbi állítások?
a) Ha egy G 3-reguláris, egyszerű gráfban van Hamilton-kör, akkor $\chi_e(G)=3$.
b) Ha egy G 3-reguláris, egyszerű, összefüggő gráfra $\chi_e(G)=3$, akkor G-ben van Hamilton-kör.

13. Egy sakktáblára valaki találomra felállított néhány figurát. Legyenek a G gráf csúcsai a figurák és két figura akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy sorban vagy egy oszlopban vannak. Mutassuk meg, hogy $\chi(G)=\omega(G)$.

14. A G páros gráfban a legnagyobb fokú csúcs fokát jelölje Δ. Mutassuk meg, hogy G-ben van olyan párosítás, ami minden Δ fokú csúcsot lefed (vagyis G minden Δ fokú csúcsára illeszkedik párosításbeli él).

15. Legyen G egy 20 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G-v$ azt a gráfot, amelyet G-ből a v (és az összes v-re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G-v)=\chi_e(G)$ (ahol χ_e a gráfok élkromatikus számát jelöli). (ZH, 2009. március 23.)

16. Legyen az n csúcsú G összefüggő gráfban F és T két feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy F élei megszámozhatók f_1-től f_{n-1}-ig és T élei is megszámozhatók t_1-től t_{n-1}-ig úgy, hogy minden $1\leq i\leq n-1$ esetén $(E(F)\setminus\{f_i\})\cup\{t_i\}$ szintén egy G-beli feszítőfa élhalmaza legyen. (ZH, 2005. március 31.)

17*. Egy G egyszerű gráf minden csúcsában lakik egy bogárka. Egy adott pillanatban minden bogárka felkerekedik és átköltözik a gráf egy szomszédos csúcsába. A bogárkák ezt úgy szeretnék megtenni, hogy végül ismét minden csúcsban egy bogárka lakjon. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor lehetséges, ha minden $X\subseteq V(G)$-re $(G-X)$-nek legföljebb $|X|$ izolált pontja van.

18*. Bizonyítsuk be, hogy ha G tetszőleges gráf, akkor $\chi_e(G)\leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.