Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Nyolcadik gyakorlat, 2024. április 9.

1. a) 7 lány (A,B, ..., G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házasulandó korba egy nomád törzsben. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a jobb oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

b) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

---

2. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás. (ZH, 2015. április 23.)

3. Egy $2n$ csúcsú G páros gráfban minden csúcs foka d (ahol $n, d \geq 1$ egészek). Mennyi $\nu(G)$?

4. Egy 100×100-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le. (ZH, 2021. április 30.)

5. A G páros gráf mindkét pontosztályában $2k$ csúcs van és G-ben minden pont foka legalább k (ahol $k \geq 1$ egész). Mennyi $\nu(G)$?

6. a) Legyen adott a G (tetszőleges) gráfban az M párosítás. Hogyan lehetne a javítóút definícióját kiterjeszteni – persze úgy, hogy igaz maradjon, hogy ha M-re nézve létezik javítóút, akkor ezt használva könnyen előállíthatunk egy M-nél nagyobb párosítást?

b) Igaz marad-e a kapott, általánosabb javítóút fogalomra a tétel, hogy ha M-re nézve nincs javítóút G-ben, akkor M maximális párosítás?

---

7. A $G = (A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy maximális független ponthalmazt G-ben. (ZH, 2022. június 1.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

9. Egy 20 csúcsú G páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Mennyi $\nu(G)$?

10. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

11. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 55. Mennyi a kromatikus száma, ha tudjuk, hogy a komplementere páros gráf? (ZH, 2010. március 25.)

12*. A hurokélmentes G gráfban minden csúcs foka $2k$ (ahol $k \geq 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G csúcshalmaza lefedhető diszjunkt körökkel (vagyis G-ben megadható néhány kör úgy, hogy G minden csúcsa pontosan egyen van rajta a körök közül).