



1. A jobbra látható G gráf azonos a HATODIK GYAKORLAT **2.** feladatában látottal. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\varrho(G)$ értékét és adjunk meg G -ben egy maximális független csúcshalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

2. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 16\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G -ben, ha $x \equiv y \pmod{3}$, vagy ha x és y közül az egyik a 16. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét és adjunk meg G -ben egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt.

3. A 20 csúcsú G gráf élei közül bárhogyan is választunk ki 8-at, G -nek mindig van olyan csúcsa, amire legalább kettő illeszkedik a kiválasztott élek közül. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választunk ki G élei közül 12-t, G -nek mindig van olyan csúcsa, amire egy sem illeszkedik a kiválasztott élek közül. (ZH, 2021. május 27.)

4. Egy 50 csúcsú egyszerű gráfban a maximális foksám 7. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) \geq 7$. (ZH, 2020. június 3. alapján)

5. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú, hurokélmentes G gráfban fennállnak az alábbi összefüggések.

- a) $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$
- b) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$

6. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq \varrho(G)$ teljesül minden izolált pontot nem tartalmazó G egyszerű gráfra.
(ZH, 2024. május 9.)

7. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 100$ számok, két különböző csúcshalmaza pedig pontosan akkor legyen szomszédos, ha közülük a nagyobbik több, mint kétszerese a kisebbiknek. (Így például G -ben a 20 nem szomszédos sem a 15-tel, sem a 40-nel, de az 5-tel és az 50-nel igen.) Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét és adjunk meg G -ben egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefoglaló csúcshalmazt és élhalmazt. (ZH, 2024. június 5. alapján)

8. A (80 csúcsú) G egyszerű gráfot a következőképpen készítjük: felvesszünk egy 3, egy 5, egy 7, egy 9, egy 11, egy 13, egy 15 és egy 17 csúcsú teljes gráfot, mindet csupa diszjunkt pontthalmazokon; majd a 3 csúcsú teljes gráf mindhárom csúcsát összekötjük a többi 77 csúcs mindegyikével. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét és adjunk meg G -ben egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt.

9. Igaz-e, hogy minden G egyszerű gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, melyben (legalább) az egyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

10. Mutassuk meg, hogy ha Z minimális lefogó élhalmaz a G egyszerű gráfban, akkor a $(V(G); Z)$ gráf minden komponense csillag. (Csillag alatt olyan, legalább két csúcsú fát értünk, aminek legfőbb egy kivétellel minden csúcsa elsőfokú.)

11*. A G gráfban az $X \subseteq V(G)$ csúcshalmazt *párosíthatónak* mondjuk, ha létezik G -nek olyan M párosítása, hogy X minden csúcsa illeszkedik M -beli élre. Az X párosítható halmaz *nem bővíthető*, ha nincs olyan $Y \neq X$ párosítható halmaz, amelyre $X \subseteq Y$. Igaz-e minden G gráf minden X nem bővíthető, párosítható halmazára, hogy $|X| = 2 \cdot \nu(G)$?

12*. Egy $k \geq 2$ tagú számsorozat *redukált átlaga* alatt azt értjük, hogy a számsorozatból töröljük a legnagyobb tagjainak az egyikét és a maradék $k - 1$ darab szám átlagát vesszük; egyetlen szám redukált átlaga alatt viszont saját magát értjük. Legyen G egyszerű, izolált pontot nem tartalmazó gráf és legyen adott a csúcsain $a : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ nemnegatív értékű súlyfüggvény, amire teljesül a következő tulajdonság: minden $v \in V(G)$ csúcs $c(v)$ súlya legalább annyi, mint v szomszédai súlyainak a redukált átlaga. Értelmezzük G élein a következő $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ súlyfüggvényt: minden $e = \{x, y\} \in E(G)$ élre $w(e) = \frac{1}{2}(c(x) + c(y))$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\nu_w(G) + \varrho_w(G) = \sum_{v \in V(G)} c(v)$, ahol $\nu_w(G)$, illetve $\varrho_w(G)$ a G -beli maximális összsúlyú párosítás, illetve a minimális összsúlyú lefogó élhalmaz összsúlyát jelöli.