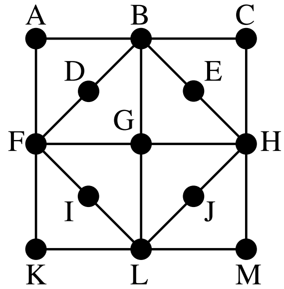
Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Hatodik gyakorlat, 2024. március 19.



1. Intervallumgráf-e egy öt csúcsú út, egy öt csúcsú kör, illetve egy négy csúcsú kör?

2. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét a jobbra látható gráfra és adjunk meg benne egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó csúcshalmazt. (ZH, 2020. június 3. alapján)

---

3. Legyen G a számegyenes következő zárt intervallumai által meghatározott intervallumgráf: $[1;3]$, $[2;4]$, $[8;11]$, $[5;11]$, $[4;9]$, $[1;6]$, $[2;7]$, $[10;11]$. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát és $\omega(G)$ klikkszámát.

4. A 101 csúcsú G gráf egy 50 pontú és egy 51 pontú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

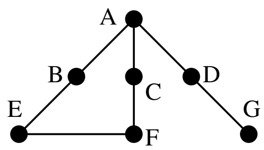
5. A $2k+1$ pontú, egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k+1$.
a) Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét. b) Előfordulhat-e, hogy $\nu(G) = \tau(G)$?

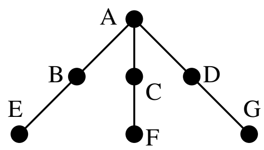
6. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 10$, a G-beli lefogó pontok minimális száma pedig $\tau(G) = 9$. Határozzuk meg G maximális klikkméretét, $\omega(G)$-t. (ZH, 2023. május 18.)

7. Mutassuk meg, hogy ha G egy intervallumgráf komplementere, akkor $\chi(G) = \omega(G)$.

---

8. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e. (ZH, 2015. április 23.)

a) 

b) 

9. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 60\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó csúcshalmazt. (ZH, 2009. március 23. alapján)

10. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8. (ZH, 2014. március 20.)

11. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.

12. Legyen M egy $n \times n$-es mátrix. Készítsük el M-ből a G páros gráfot a következőképpen: G egyik pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, a másik $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$; továbbá minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az M mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem nem nulla. Mutassuk meg, hogy ha $\det M \neq 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

13. A V véges halmaz minden eleme a síknak egy olyan pontja, amelynek a második koordinátája nagyobb az elsőnél. A G gráf csúcshalmaza legyen V és bármely $u, v \in V$, $u = (a, b)$, $v = (x, y)$ esetén (ahol tehát $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ és $a < b$, $x < y$) az u és a v akkor legyen szomszédos G-ben, ha $b \geq x$ és $y \geq a$. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) = \omega(G)$.

14. Legyen G az a (végtelen) gráf, amelynek csúcsai a sík (összes) pontjai és két csúcs akkor szomszédos G-ben, ha a távolságuk 1. Mutassuk meg, hogy $4 \leq \chi(G) \leq 9$.

15. a) Egy egyszerű gráf három komponense közül az első az u izolált pontból áll, a második a v_1, v_2 csúcsokból és a köztük futó élből, a harmadik pedig egy öt pontú kör a $\{w_1, w_2, \dots, w_5\}$ csúcshalmazon. Most minden $1 \leq i \leq 2$ és $1 \leq j \leq 5$ esetén vegyünk hozzá a gráfhoz egy új $x_{i,j}$ csúcsot, amit kössünk össze u-val, v_i-vel és w_j-vel. Határozzuk meg a kapott (18 csúcsú és 36 élű) G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát és $\omega(G)$ klikkszámát.

b) Konstruáljunk olyan G gráfot, amire $\omega(G) = 2$, $\chi(G) = 5$ és a csúcsszáma kevesebb, mint milliomod része a Zykov-konstrukció által készített, ugyanilyen ω és χ értékekkel bíró gráfnak.

16. A G gráfra $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$ és az $i \neq j$ csúcsok akkor szomszédosak, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$. Mennyi $\tau(G)$?

17. a) A 10^{10} csúcsú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 2024. Mutassuk meg, hogy $\nu(G) \geq 2024$.
b*) Milyen n-ek esetén igaz ugyanez az állítás 10^{10} helyett n csúcsú gráffal?

18*. Legyen adott egy T fa és ennek $F_1, \dots, F_n$ részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j ($i \neq j$) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \omega(G)$.