1. A G gráf csúcsai legyenek az 5 hosszúságú bitsorozatok (vagyis csupa 0 és 1 tagokból álló sorozatok). Két bitsorozat akkor legyen szomszédos G-ben, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól. Páros gráf-e a G gráf? (ZH, 2016. május 9.)

2. A $V(G) = \{1, 2, \ldots, 30\}$ halmaz legyen a G gráf csúcshalmaza. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha az x és y számok különbsége legalább 7. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát. (ZH, 2016. május 9.)

---

3. A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői; két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy király legföljebb két lépésben el tud jutni az egyikről a másikra. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

4. Egy szabályos 11-szögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11 csúcsú, 22 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát. (ZH, 2021. április 30. alapján)

5. A G egyszerű gráfban 2024 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2023. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2024$.

6. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni. (ZH, 2010. március 25.)

7. Bizonyítsuk be, hogy minden e élű G egyszerű gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű gráfban a kromatikus szám legföljebb annyi, mint a gráfban előforduló leghosszabb út csúcsainak száma.

---

9. Egy 9 csúcsú egyszerű gráfnak 21 éle van. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör. (ZH, 2022. június 1.)

10. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmaz. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét. (ZH, 2003. május 22.)

11. Határozzuk meg egy 101 csúcsú kör komplementerének a kromatikus számát.

12. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G-ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$. (ZH, 2003. május 13.)

13. Adott a síkban néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen G az ezek által meghatározott gráf: G csúcsai az egyenesek metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha az egyik egyenesen szomszédos metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges m élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legföljebb $\frac{m}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen.

15. Egy sakktáblán világos és sötét huszárok állnak, összesen hét darab. Mindegyik huszár legalább két ellenséges huszárt tud ütni. Mutassuk meg, hogy a világos huszárok mind azonos színű mezőn állnak. (ZH, 2015. április 23.)

16. A pozitív egészek tetszőleges, véges X részhalmaza esetén legyenek a G_X gráf csúcsai az X elemei és két különböző egészt akkor kössünk össze G_X-ben, ha a kisebbik osztója a nagyobbnak. A pozitív egészek mely X részhalmazaira igaz, hogy $\chi(G_X) = \omega(G_X)$?

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő, egyszerű G gráf nem reguláris (vagyis nem minden pont foka azonos), akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$. ($\Delta(G)$ a G-beli maximális fokszámot jelöli.)

18. Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfnak van olyan részgráfja, amiben minden pont foka legalább $\chi(G) - 1$.

19. A G és H egyszerű gráfok $G \times H$-val jelölt szorzatát definiáljuk a következőképpen: $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, vagyis $G \times H$ csúcsai azok az (u, v) rendezett párok, amelyekre $u \in V(G)$ és $v \in V(H)$; továbbá az $(u, v) \in V(G \times H)$ és $(x, y) \in V(G \times H)$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak $G \times H$-ban, ha $\{u, x\} \in E(G)$ és $\{v, y\} \in E(H)$. (Így például a $K_2 \times K_3$ gráf egy hat pontú kör.) Mutassuk meg, hogy $G \times H$ akkor és csak akkor páros gráf, ha G és H közül legalább az egyik páros gráf.

20*. A számegyenes $[1, n]$ intervallumának egész végpontú, nem elfajuló (vagyis nem nulla hosszúságú), zárt részintervallumai alkossák az S_n gráf csúcshalmazát. Két intervallum akkor legyen szomszédos S_n-ben, ha a metszetük éppen 1 pontú. Határozzuk meg $\chi(S_n)$ értékét.