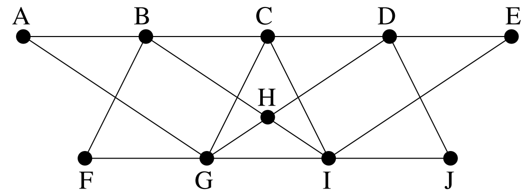
Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Negyedik gyakorlat, 2024. március 4.

1. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden v csúcsra v távolságát a kezdőponttól, azt a csúcsot, ahonnan az eljárás v-t elérte, valamint a bejáráshoz tartozó BFS-fát).



a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J

2. A tíz csúcsú G teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Minden $1 \le i < j \le 10$ $\{i, j\}$ él súlya az i és j értékek közül a nagyobb. Adjunk meg G-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát.

---

3. Egy élsúlyozott, összefüggő G gráfban minden él súlya legföljebb 100. Tudjuk, hogy G-ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élt. Mutassuk meg, hogy ekkor G minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élt.

4. a) Olyan algoritmust kell terveznünk, amely egy adott G gráf és annak egy e éle esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét. Hogyan lehetne a BFS algoritmust ennek a feladatnak a hatékony megoldására felhasználni?

b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

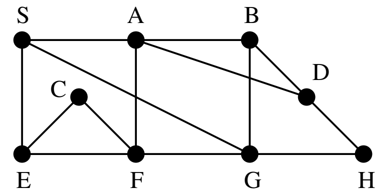
5. a) Legyen G összefüggő, egyszerű gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \le w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t. (ZH, 2015. március 19.)

b) Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \le w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t. (ZH, 2015. május 4.)

6. Egy G összefüggő gráf u és v csúcsainak *távolsága* alatt az u és v közötti legrövidebb út hosszát (vagyis éleinek a számát) értjük. A G gráf *átmérője* alatt a G-beli csúcspárok távolságának maximumát (vagyis a legtávolabbi csúcsok távolságát) értjük. Mutassuk meg, hogy ha a 24 csúcsú G egyszerű gráfban az egyik csúcs foka 5, az összes többi csúcs foka pedig 3, akkor G átmérője legalább 4. (ZH, 2021. május 27.)

---

7. a) A BFS algoritmus a jobbra látható ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, □, H, □, F, C, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.



b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet a gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája? (ZH, 2015. március 19.)

8. A G összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az s csúcsából indított BFS algoritmus a v csúcsot tizenharmadikként éri el (az elsőként elért csúcsnak s-et tekintjük). Előfordulhat-e, hogy v távolsága s-től

a) 2; b) 3; c) 8?

9. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára *illeszkedőnek*, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F. Legföljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő, egyszerű gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik? (ZH, 2015. május 20.)

10. A G összefüggő gráfot nevezzük *furcsának*, ha G éleihez hozzá lehet rendelni valós súlyokat úgy, hogy nem minden él súlya egyenlő, de minden feszítőfában az élsúlyok összege azonos. Alkossunk és bizonyítsunk be egy olyan „értelmes” tételt, amely szükséges és elégséges feltételt ad arra nézve, hogy egy gráf mikor furcsa. (A tétel „értelmessége” pontosan azt jelenti, hogy az általa mondott szükséges és elégséges feltétel teljesülése polinomiális lépésszámú algoritmussal ellenőrizhető.)

11. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény a G élein. Mutassuk meg, hogy G minden (w-re nézve) minimális összsúlyú feszítőfája megkapható, mint a Kruskal-algoritmus egyik lehetséges futásának az eredménye.

12. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény a G élein. Rendezzük G éleit a $w(e)$ élsúlyok szerinti *csökkenő* sorrendbe, majd ebben a sorrendben haladva döntsünk minden élről: ha az aktuális él elhagyása nem rontja el az összefüggőséget, akkor hagyjuk el, egyébként tartsuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az „óvatos algoritmus” is mindig minimális összsúlyú feszítőfát ad.