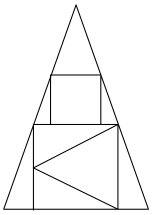
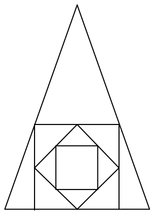
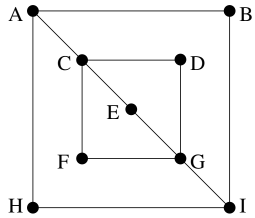
Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Harmadik gyakorlat, 2024. február 27.

1. Ha lehet, rajzoljuk le az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.

a)  b) 

2. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör? (ZH, 2011. május 17.)

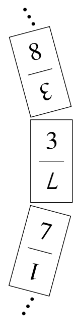


3. A G egyszerű gráfnak $2k+1$ csúcsa van. Az egyik csúcs foka k, az összes többi csúcs foka legalább $k+1$. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör. (ZH, 2003. március 27.)

---

4. Bejárható-e egy 4×4-es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá?

5. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n-ek esetén létezik ilyen elhelyezés. (ZH, 2007. március 29.)



6. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem.

7. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka 4, akkor az élei kiszínezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy (minden él teljes hosszában egy színű legyen és) minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

8. Igazoljuk, hogy ha a $2k+1$ pontú G egyszerű gráfban minden pontfoka legalább k, akkor G-ben van Hamilton-út.

---

9. Van-e Hamilton-kör az alábbi G gráfokban? És Hamilton-út?

a) Egy 5×5-ös sakktábla egyik sarkát kivágjuk. A maradék 24 mező alkotja G csúcsait és két különböző csúcs akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők él mentén szomszédosak. (ZH, 2013. március 21.)

b) Ugyanaz, mint az a) feladat, csak két átellenes sarkot hagyunk el. (ZH, 2013. március 21.)

10. Van-e Euler-séta, illetve Euler-körséta az alábbi G gráfokban?

a) G csúcsai egy 6 elemű halmaz 3 elemű részhalmazai; két csúcs akkor szomszédos, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. (ZH, 2019. május 20.)

b) G csúcsai a 100 hosszú $0-1$ sorozatok; két csúcs akkor szomszédos, ha a két megfelelő sorozat pontosan 2 helyen tér el.

11. Legyen G egy 101 csúcsú egyszerű gráf, amelyben az egyik pont foka 50, az összes többi pont foka 49. Bizonyítsuk be, hogy G-hez hozzá lehet venni 50 darab élet úgy, hogy a kapott gráf továbbra is egyszerű gráf legyen és tartalmazzon Euler-kört. (ZH, 2009. március 23.)

12. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges, vagyis bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legföljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha a bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legföljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban? (ZH, 2012. március 12.)

13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú egyszerű gráfnak legalább $\frac{n^2-3n+6}{2}$ éle van, akkor van benne Hamilton-kör. Mutassuk meg azt is, hogy ez a korlát semmilyen n esetén nem javítható.

14. Minimálisan hány élből áll a $K_{10,11}$ gráfban egy olyan élsorozat, ami a gráf összes élét tartalmazza? (ZH, 2012. május 15.) (A $K_{10,11}$ gráf csúcshalmaza 10 kék és 11 piros csúcsból áll és két csúcs akkor szomszédos, ha különböző színűek.)

15. Egy kisvárost szeretne bejárni egy kukásautó úgy, hogy minden utcán mindkét irányban (pontosan) egyszer halad végig. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy ez mely kisvárosokra tehető meg.

16.a) Megszínezhetők-e a Petersen-gráf élei három színnel úgy, hogy minden csúcsra három különböző színű él illeszkedjen?

b) A választ felhasználva bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör.

(Nincs hely iderajzolni a Petersen-gráfot, de könnyen megtalálható a neten vagy a BSz2 jegyzet 1.9. feladatában.)

17. Egy gráf egy csúcsból kiinduló 50 élét nevezzük *50-csillagnak*. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka 100, akkor a gráf élhalmaza felvágható páronként diszjunkt 50-csillagokra.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $k+1$, akkor a gráf bármely élén át vezet Hamilton-kör.

19*. Milyen n-ekre igaz a **6.** feladat állítása n tagú társasággal?