Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Második gyakorlat, 2024. február 20.

1. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

2. Hány csúcsa lehet egy olyan fának, amiben a csúcsok fokszámai között pontosan kétféle érték fordul elő és mindkettő ugyanannyiszor? (ZH, 2019. május 20. alapján)

---

3. Egy 23 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, amik között van a gráfban út. (ZH, 2017. május 15.)

4. A 10 csúcsú G egyszerű gráfban teljesül, hogy bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \leq k \leq 10$, a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek legalább 36 éle van. (ZH, 2023. május 18.)

5. A G gráfnak 20 csúcsa, 18 éle és 3 komponense van. Hány fa lehet G komponensei között?

6. Adjuk meg az összes olyan 25 csúcsú F fát, amelyre létezik olyan $m \geq 2$ egész, hogy F minden pontjának a foka azonos maradékot ad m-mel osztva. (ZH, 2018. május 23.)

7. Egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, ahol $k \geq 2$ egész. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban található legalább $k + 1$ pontú kör.

8. Létezik-e olyan (legalább két csúcsú) összefüggő gráf, aminek tetszőleges csúcsát törölve (annak összes élével együtt) a kapott gráf már nem összefüggő?

---

9. Egy 10 csúcsú fában van két 5 fokú csúcs. Igazoljuk, hogy ez a két csúcs szomszédos. (ZH, 2022. május 24.)

10. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

11. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a gráfnak van három különböző feszítőfája. (ZH, 2017. május 8.)

12. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.) (ZH, 2017. március 16.)

13. A G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 3. Mutassuk meg, hogy G-ben van páros hosszú kör.

14. Egy fában a legnagyobb fokú csúcs foka Δ. Bizonyítsuk be, hogy a fának legalább Δ darab 1 fokú csúcsa van.

15. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan feszítőfája, ami e-t és f-et is tartalmazza.

16. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)

17. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.

18. Egy kisváros utcáinak hálózata összefüggő, egyszerű gráfot alkot. Mivel az utcák nagyon keskenyek, a polgármester szeretné a város összes utcáját egyirányúsítani – de valami rejtélyes babona miatt úgy, hogy a gráf minden csúcsából páratlan sok utcán lehessen elindulni. Bizonyítsuk be, hogy ilyen irányítás akkor és csak akkor készíthető, ha a csúcsok száma és az élek száma azonos paritású.

19*. Valaki felhívja az előző feladatbeli polgármester figyelmét, hogy a furcsa páratlansági feltételénél sokkal fontosabb volna, hogy az egyirányúsítás után is mindenhonnan mindenhová el lehessen jutni. Bizonyítsuk be, hogy ilyen irányítás akkor és csak akkor létezik, ha a gráf tetszőleges élének elhagyása után is összefüggő marad. (Itt tehát már nem feltétel, hogy minden csúcsból páratlan sok utcán lehessen elindulni.)

20*. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, minden csúcs foka legföljebb Δ. Elkészítjük G-ből az $n \times n$-es A mátrixot úgy, hogy minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén $a_{i,j} = 1$, ha v_i és v_j szomszédosak G-ben, egyébként $a_{i,j} = 0$. (A-t G *szomszédsági mátrixának* hívják.) Mutassuk meg, hogy A minden λ sajátértékére $\lambda \leq \Delta$ teljesül.