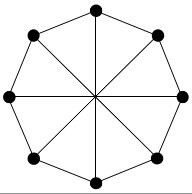
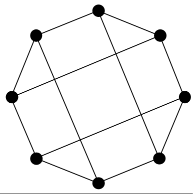
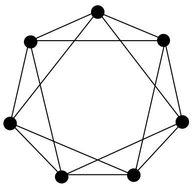
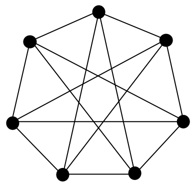
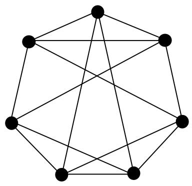
Bevezetés a Számításelméletbe II. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Első gyakorlat, 2024. február 13.

1. Egy G gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak) G-vel?

a)

b)


---

2. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?

a)

b)

c)


3. A 100 csúcsú G irányított gráfban minden csúcs kifoka legalább annyi, mint a befoka (ahol egy csúcs kifoka, illetve befoka alatt az abból kilépő, illetve az abba belépő élek számát értjük). G egyik csúcsának a kifoka 18. Mennyi lehet ugyanennek a csúcsnak a befoka?

4. Legyen G egy n csúcsú, egyszerű gráf. Mi d-nek az a legkisebb értéke, amire teljesül, hogy ha G-ben minden csúcs foka legalább d, akkor G-ben bármelyik csúcsból bármelyik másikba el lehet jutni az élek mentén lépegetve?

5. Legyen G egy legalább 6 csúcsú, egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere közül legalább az egyik tartalmaz háromszöget (vagyis három olyan csúcsot, amik közül bármelyik kettő szomszédos).

6. Kovács úr és a felesége négy házaspárt látott vendégül. Érkezéskor a jelenlévők közül bizonyosak kezet fogtak egymással. Mikor már mindenki megérkezett, Kovács úr mindenkitől megkérdezte, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet Kovács úr felesége? (Természetesen senki sem fogott kezet a saját házastársával.)

---

7. Egy szabályos kilencszögnek húzzuk be az összes legrövidebb (vagyis a kilencszögben másodszomszédos csúcsokat összekötő) átlóját. Igaz-e, hogy az így kapott (9 csúcsú és 18 élű) gráf izomorf a saját komplementerével?

8. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legföljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G-nek? (ZH, 2015. március 19.)

9. Milyen n pozitív egészekre létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, amiben bármely két csúcs foka különböző?

10. Bizonyítsuk be, hogy minden (hurokélt nem tartalmazó) irányított gráf élei megszínezhetők két színnel úgy, hogy bármelyik v csúcsból indulva és csupa azonos színű él mentén lépegetve (de az irányításokat persze betartva) sohasem juthatunk vissza v-be.

11. Egy legalább 17 csúcsú teljes gráf éleit valaki megszínezte 3 különböző színnel. Mutassuk meg, hogy a csúcsok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az általuk meghatározott 3 él közül bármely kettő azonos színű. (A teljes gráfban bármely két csúcs szomszédos egyetlen él mentén.)

12. Egy n csúcsú teljes gráf éleit valaki megszínezte n különböző színnel (ahol $n \geq 3$ egész). Mutassuk meg, hogy a csúcsok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az általuk meghatározott 3 él közül bármely kettő különböző színű.

13. Legyen G egy n csúcsú, m élű egyszerű gráf, amiben nincs háromszög (azaz három olyan csúcs, amik közül bármely kettő szomszédos). Nevezzünk G-ben *cseresznyének* két olyan élt, amik közös csúcsban találkoznak. Bizonyítsuk be, hogy

a) G-ben a cseresznyék száma legföljebb $\frac{1}{2}(n-2)m$;
b) G-ben a pontok fokának négyzetösszege legföljebb $n \cdot m$;
c) $m \leq \frac{1}{4}n^2$;
d) a c) feladatban kapott felső becslés nem javítható (vagyis annál jobb felső becslés már nem volna igaz).

14*. A G gráf csúcshalmaza felbontható az A és B halmazok egyesítésére úgy, hogy G minden élének az egyik végpontja A-beli, a másik végpontja B-beli csúcs. (Az ilyen gráfokat egyébként *páros gráfnak* nevezik.) Tudjuk továbbá, hogy G nem tartalmaz izolált pontot (vagyis minden csúcs foka legalább 1) és bármely $a \in A$ és $b \in B$ szomszédos csúcsok esetén $d(a) \geq r \cdot d(b)$, ahol $r \geq 1$ rögzített valós szám. Mutassuk meg, hogy $|B| \geq r \cdot |A|$.

15*. Milyen n-ekre létezik n csúcsú, a komplementerével izomorf egyszerű gráf?

16*. Bizonyítsuk be, hogy minden társaság szétosztható két csoportra úgy, hogy mindenkinek a saját csoportján belül páros sok ismerőse legyen. (A társaságban az ismeretségek kölcsönösek.)