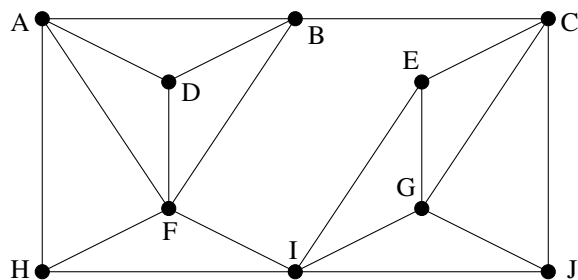


1. Határozzuk meg az ábrán látható K gráfra a következő értékeket.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $\kappa_K(B, I)$ | b) $\kappa_K(C, I)$ |
| c) $\kappa_K(A, J)$ | d) $\kappa_K(B, C)$ |

2. Határozzuk meg $\lambda(K)$ és $\kappa(K)$ értékét az ábrán látható K gráfra.



3. Legyenek A , B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A , B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg $\lambda(G)$ és $\kappa(G)$ értékét. ($\approx$ ZH, 2003. április 30.)

4. A G egyszerű, n csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább $n+k-2$ (ahol $n > k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G k -szorosan összefüggő. (ZH, 2011. április 21.)

5. Adjunk új bizonyítást König „ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$ ” tételére a Menger-tételek felhasználásával.

6. Legyen G egy k -szorosan összefüggő gráf és A és B a G csúcsainak k elemű, diszjunkt részhalmazai. Bizonyítsuk be, hogy létezik G -ben k darab páronként (teljes egészében, nem csak belsőleg) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B -beli pontokat köt össze.

7. Mutassuk meg, hogy ha G egy legalább három csúcsú, összefüggő, reguláris páros gráf, akkor G 2-szeresen összefüggő. (ZH, 2002. május 16.)

8. Igazoljuk, hogy egy 3-reguláris egyszerű gráf akkor és csak akkor k -szorosan élösszefüggő, ha k -szorosan pontösszefüggő.

9. Legyen G egy 100 csúcsú gráf és $x, y \in V(G)$ különböző csúcsok. Tudjuk, hogy bárhogyan választjuk G -ben az $u, v \in V(G)$ csúcsokat úgy, hogy azok x -től és y -től különbözzenek, G -ben van olyan út, amely x -ből y -ba vezet és nem tartalmazza sem u -t, sem v -t. Mutassuk meg, hogy ekkor x -ből y -ba vezet olyan út, amelynek hossza (éleinek száma) legfeljebb 33. (ZH, 2007. március 29.)

10. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k számot, melyre a gráf biztosan k -szorosan pontösszefüggő. (ZH, 2017. április 20.)

11. Legyen $k \geq 1$ egész és G egy legalább $2k + 1$ pontú, k -szorosan összefüggő gráf. Értelmezzük a H gráfot a következőképpen: $V(H) = V(G)$ és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos H -ban ha G -ben szomszédosak vagy van közös szomszédjuk. Bizonyítsuk be, hogy a H gráf $2k$ -szorosan összefüggő. (ZH, 2009. május 4.)

12.a) Egy irányított gráfot akkor hívunk *erősen összefüggőnek*, ha bármely pontjából bármely pontjába vezet irányított út. Bizonyítsuk be, hogy egy G (irányítatlan) gráf élei akkor és csak akkor irányíthatók úgy, hogy erősen összefüggő gráfot kapjunk, ha G kétszeresen élösszefüggő.

b) A G gráf bizonyos élei már irányítottak, a többi még irányítatlan. Szeretnénk a még irányítatlan éleket is irányítottá tenni úgy, hogy a keletkező irányított gráf erősen összefüggő legyen. Adjunk az a) feladat állítását általánosító szükséges és elégséges feltételt arra, hogy ez mikor lehetséges.

13. Egy irányított gráfot akkor nevezünk k -szorosan élösszefüggőnek, ha bárhogyan legfeljebb $k - 1$ élettől törölve a maradék gráf bármely s csúcsából bármely t csúcsába vezet irányított út. Bizonyítsuk be, hogy minden $2k$ -szorosan élösszefüggő, $2k$ -reguláris ($k \geq 1$) gráf élei irányíthatók úgy, hogy a kapott irányított gráf k -szorosan élösszefüggő legyen. (Megjegyzés: Nash-Williams tétele azt mondja, hogy a feladatbeli állítás igaz minden $2k$ -szorosan élösszefüggő gráfra, a pontok fokára vonatkozó feltétel nélkül is.)

14*. Mutassuk meg, hogy ha $k \geq 2$ egész és a G gráf k -szorosan összefüggő, akkor G csúcsai közül bárhogyan legfeljebb k darabot kiválasztva G -ben van olyan kör, ami a kiválasztott csúcsok mindegyikét tartalmazza.

15*. Tegyük fel, hogy a G gráf k -szorosan élösszefüggő, de bárhogyan hagyunk el belőle egy élt, a kapott gráf már nem az. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek van k -adfokú csúcsa.