

1. a) Mennyi a TIZEDIK GYAKORLAT 1. feladatának hálózatában az $\{S, A, B\}$ vágás kapacitása?
b) Adjunk meg ebben a hálózatban egy minimális kapacitású vágást.

2. a) Mennyi a TIZEDIK GYAKORLAT 2. feladatának hálózatában az $\{S, C, D\}$ vágás kapacitása?
b) Mutassuk meg egy megfelelő vágás segítségével, hogy a feladat által a hálózatban megadott 10 értékű folyam (a $p = 3, q = 0$ értékek mellett) maximális értékű.

3. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ rögzített csúcs és a $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Tegyük fel, hogy bármely $t \in V(G)$, $t \neq s$ csúcs esetén az s -ből t -be vezető maximális folyam értéke legalább 100 és a t -ből s -be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választjuk az $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ csúcsokat, az u -ból v -be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. (ZH, 2016. május 9.)

4. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értéke s -ből t -be 10. Ha az e él kapacitását 1-gyel növeljük, az f él kapacitását viszont 1-gyel csökkentjük, akkor a maximális folyam értéke nem változik, marad 10. Előfordulhat-e, hogy ha az e él kapacitását 1-gyel csökkentjük és az f él kapacitását 1-gyel növeljük, akkor az így kapott hálózatban a maximális folyam értéke

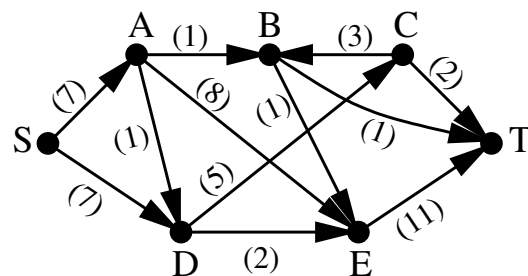
- a) 9; b) 10; c) 11? (ZH, 2024. június 5.)

5. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értéke 100. Ha minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel, akkor a maximális folyam értéke 110 lesz. Következik-e ebből, hogy

- a) G -nek van olyan e éle, amire $c(e) \leq 10$; b) G -nek van olyan e éle, amire $c(e) \geq 10$?

6. a) Határozzuk meg a jobbra látható hálózatban az $\{S, D\}$ vágás kapacitását.

b) Igaz-e, hogy $\{S, D\}$ minimális kapacitású vágás ebben a hálózatban? (ZH, 2023. június 14.)



7. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ csúcs és a $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $m(v)$ az s -ből a v -be vezető maximális folyam értékét. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $m(t) = 100$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $m(v) > 100$. Mutassuk meg, hogy ekkor a t -be érkező élek összkapacitása 100. (ZH, 2013. május 16.)

8. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban a maximális st -folyam nagysága 24. Ha az (u_1, v_1) és az (u_2, v_2) élek mindegyikének a kapacitását 32-vel megnöveljük, akkor a maximális st -folyam nagysága 88-ra változik. Meghatározható-e mindezek alapján, hogy mennyi lesz a maximális st -folyam nagysága akkor, ha az eredeti hálózatban az (u_1, v_2) él kapacitását 13-mal csökkentjük, az (u_2, v_1) él kapacitását pedig 31-gyel növeljük? Ha igen, akkor mennyi ez a maximum? (Az (u_1, v_2) él kapacitása az eredeti hálózatban legalább 13 volt.) (König Dénes Diszkrét Matematika Verseny, 2022.)

9*. A G irányított gráf valamilyen adattovábbítására szolgáló hálózatot modellez, minden csúcsból az $r \in V(G)$ központba kellene adatokat küldeni. Minden $Z \subseteq E(G)$ esetén jelölje $f(Z)$ azon csúcsok számát, amelyekből r (irányított úton) elérhetetlenné válik a Z -beli élek törlése után. Egy G -t ért „támadás” (vagyis bizonyos élek törlése) annál hatékonyabb, minél kisebb a $\frac{|Z|}{f(Z)}$ arány. Ezért a $\min_{Z \subseteq E(G)} \frac{|Z|}{f(Z)}$ minimum jól méri a hálózat megbízhatóságát. Adjunk olyan (hatékony) algoritmust, amely adott G , $r \in V(G)$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén eldönti, hogy a hálózat (fenti értelemben vett) megbízhatóságának mértéke eléri-e a t értéket.

10*. Legyen adott egy $G(V, E)$ irányított gráf és élein a $b : E \rightarrow \mathbb{R}$ alsó, és a $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ felső kapacitásfüggvény úgy, hogy $b(e) \leq c(e)$ minden e élre. Egy $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *megengedett áramnak* nevezzük, ha $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$ teljesül minden e élre és minden v csúcsra a v -be belépő éleken vett f -értékek összege megegyezik a v -ből kilépő éleken vett f -értékek összegével. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha a csúcsok tetszőleges X részhalmazára az X -be belépő éleken vett b -értékek összege legfeljebb annyi, mint az X -ből kilépő éleken vett c -értékek összege.