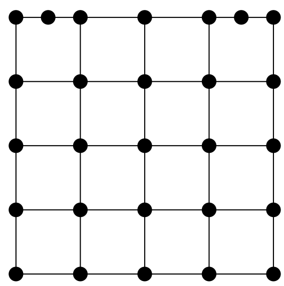
Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2020.05.08.

1. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont, az egy fokú csúcsok száma pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.

2. Egy egyszerű, nem összefüggő gráfban minden csúcs foka legalább kettő. Mutassuk meg, hogy a gráf komplementere nem síkbarajzolható.

3. Döntsük el az alábbi gráfról, hogy van-e Hamilton-köre.



4. Egy 100 csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

5. Egy $2n$ csúcsú gráfból elhagytuk egy Hamilton-körének éleit. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legfeljebb kettővel csökkent.

6*. Egy 12 csúcsú egyszerű, körmentes gráfban pontosan kétféle fokszám fordul elő, éspedig mindkettő legalább ötször. Hány éle lehet a gráfnak?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc, a dolgozatok feltöltésére további 30 perc áll rendelkezésre. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2020.05.25.

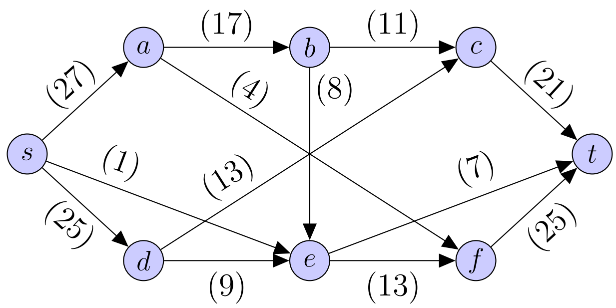
1. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg?

2. Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont és minden csúcs foka páros. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzávehető egy él úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.

3. A 9 csúcsú G gráf egy 3 és egy 7 csúcsú körből áll úgy, hogy a v csúcs mindkét körben szerepel, de ezen kívül a köröknek nincs közös pontjuk. Határozzuk meg G komplementerének kromatikus számát.

4. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 10. Igaz-e, hogy ekkor a minimális lefogó ponthalmaz mérete is legalább 10?

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális $s-t$ vágást.



6*. Egy 20 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak 22 éle van. Döntsük el, hogy a gráf síkbarajzolható-e.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc, a dolgozatok feltöltésére további 30 perc áll rendelkezésre. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.
aláíráspótló zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2020.06.03.

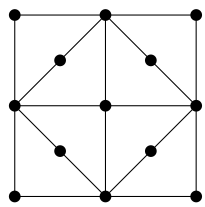
1. Baumkopf úr új jelszót szeretne készíteni magának, mert sok aggasztó hírt hallott adatlopásokról. A jelszóval kapcsolatban a következő elvárásai vannak:

a) csak betűkből álljon (a számokat nem szereti), mégpedig pontosan 8-ból, az angol abc 26 betűje jöhet szóba,
b) egyetlen betű sem jelenhet meg egynél többször,
c) kis- és nagybetűket is lehet használni, de ugyanaz a betű csak az egyik alakjában szerepelhet.

Hány jelszóból választhat Baumkopf úr? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

2. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható gráfra teljesül, hogy el tudjuk hagyni egy feszítőfájának éleit úgy, hogy a kapott H gráf összefüggő maradjon. Mutassuk meg, hogy ha H-ból is elhagyjuk egy feszítőfájának éleit, akkor olyan gráfot kapunk, melynek legalább 4 komponense van.

3. Adjunk meg egy maximális párosítást az alábbi gráfban.



4. Adjunk példát olyan gráfra, melynek kromatikus száma 8, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve a kromatikus szám 4-re csökken.

5. Egy 50 csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 7. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 7 csúcsú független ponthalmaz.

6*. Létezik-e olyan egyszerű gráf, melynek élkromatikus száma 5, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve az élkromatikus szám 2-re csökken?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc, a dolgozatok feltöltésére további 30 perc áll rendelkezésre. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
pontozási útmutató
2020. május 8.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont, az egy fokú csúcsok száma pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.

* * * * *

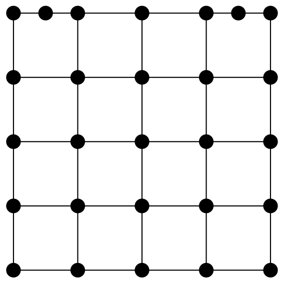
A feladat feltételei szerint a gráf legalább 2 fokú csúcsainak száma 17. (3 pont)
E 17 csúcs fokszámösszege legalább 34, (2 pont)
így a gráfbeli összes csúcs fokszámösszege legalább 37. (1 pont)
Mivel a fokszámösszeg az élszám kétszerese, páratlan nem lehet, tehát legalább 38 kell legyen, (2 pont)
így a gráfnak legalább 19 éle van. (2 pont)

2. Egy egyszerű, nem összefüggő gráfban minden csúcs foka legalább kettő. Mutassuk meg, hogy a gráf komplementere nem síkbarajzolható.

* * * * *

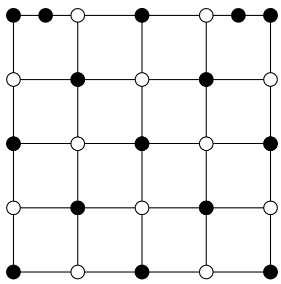
Mivel a gráf nem összefüggő, létezik két komponense (esetleg több is, de nekünk elég kettő), legyenek ezek A és B. (2 pont)
Mivel a gráf egyszerű és minden csúcs foka legalább 2, A és B is legalább 3 csúcsot tartalmaz. (2 pont)
Mivel A és B csúcsai közt nem mennek élek a gráfban (hiszen különböző komponensekről van szó), a komplementerben A és B csúcsai közt minden lehetséges él szerepel. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a komplementernek részgráfja a $K_{3,3}$ gráf, (2 pont)
így a Kuratowski tétel (könnyű iránya) szerint nem síkbarajzolható. (2 pont)

3. Döntsük el az alábbi gráfról, hogy van-e Hamilton-köre.

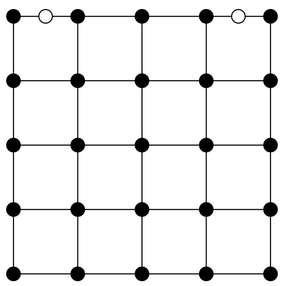


* * * * *

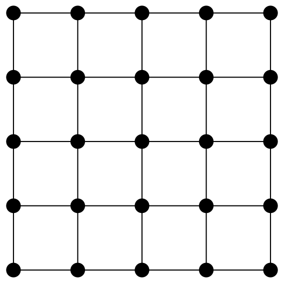
Első megoldás. Az alábbi ábrán fehérrel jelzett 12 csúcsot elhagyva a gráf 13 komponensre esik szét, (7 pont)
amiből az előadáson tanult tétel szerint következik, hogy nincs Hamilton-köre. (3 pont)



Második megoldás. Ha a gráfnak lenne Hamilton-köre, akkor az tartalmazná az alábbi ábrán fehérrel jelölt két csúcsból kivezető két-két élet, hiszen ezeknek a csúcsoknak a foka 2. (2 pont)



Ebből következne, hogy abban a gráfban, amit a fehérrel jelölt csúcsok és a belőlük vezető élek elhagyásával és a csúcsok szomszédjai közti élek behúzásával kapunk (ld. az alábbi ábrán) szintén lenne Hamilton-kör. (Fordítva egyébként ez nem feltétlen kéne, hogy teljesüljön.)
(3 pont)



Mivel a kapott gráf páros gráf, (1 pont)
nem lehet páratlan köre, (1 pont)
tehát Hamilton-köre sem (hiszen 25 csúcsa van). (1 pont)
A maradék 2 pont annak belátásáért jár, hogy a kapott 25 csúcsú gráf páros (pl. egy jó 2-színezés megadásával).

Az eredeti gráf persze nem páros gráf, hiszen van benne pl. 5 hosszú kör. Aki azt feltételezi, hogy az eredeti gráf páros és helyesen látja be, hogy ekkor nem lehetne Hamilton-köre, az kapjon 1 pontot.

4. Egy 100 csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

* * * * *

A minimális lefogó ponthalmaz mérete G-ben Kőnig tétele szerint azonos a maximális párosítás méretével, ami nyilván 50. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy a H gráfra is igaz, hogy a minimális lefogó ponthalmaz mérete 50. (1 pont)
Mivel G a H részgráfja, a kérdéses méret természetesen nem lehet 50-nél kisebb. (1 pont)
Mivel G-nek van teljes párosítása, a két osztálya azonos méretű kell legyen, vagyis mindkettő 50 csúcsú (1 pont)
és természetesen mindkettő lefogó ponthalmaza G-nek. (1 pont)
Ha az új élet a két osztály közé húzzuk be, akkor mindkét osztály továbbra is lefogó ponthalmazt alkot, így a kérdéses méret 50. (2 pont)
Ha az új élet az egyik osztályon (mondjuk A-n) belül húzzuk be, A akkor is lefogó ponthalmaza H-nak, (2 pont)
így a H-beli minimális lefogó ponthalmaz mérete mindenképp 50. (1 pont)

5. Egy $2n$ csúcsú gráfból elhagytuk egy Hamilton-körének éleit. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legfeljebb kettővel csökkent.

* * * * *

Jelöljük az elhagyás előtti gráfot G-vel, az elhagyás utáni gráfot H-val. Azt kell megmutatnunk, hogy G élkromatikus száma legfeljebb kettővel nagyobb, mint H élkromatikus száma, mely utóbbi számot jelöljük k-val. (2 pont)
Színezzük ki ehhez G élei közül először azokat, melyek H-ban is benne vannak, k színnel.
(3 pont)
G eddig nem színezett élei egy $2n$ csúcsú kört alkotnak, melynek éleit két eddig nem használt

színnel (mondjuk piros és kék) meg tudjuk színezni. (2 pont)
Valóban: ha a kör páratlan sorszámú éleit pirosra, páros sorszámú éleit kékre színezzük, (1 pont)
akkor sem két piros, sem két kék élnek nem lesz közös csúcsa. (1 pont)
Így G összes élét meg tudtuk színezni $k+2$ színnel, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

A Vizing-tétel akkor sem segítene sokat, ha tudnánk, hogy a gráf egyszerű. Ha valaki egyszerű gráfra a Vizing segítségével megmutatja, hogy a csökkenés legfeljebb 3, az az utolsó 8 pontból kaphat legfeljebb 2-t. Ha valaki az egyszerűség kikötése nélkül használja a Vizinget, az erre ne kapjon pontot.

6*. Egy 12 csúcsú egyszerű, körmentes gráfban pontosan kétféle fokszám fordul elő, éspedig mindkettő legalább ötször. Hány éle lehet a gráfnak?

* * * * *

Mivel a gráf (nevezzük G-nek) körmentes, minden komponense fa. (1 pont)
Nem lehet minden komponense izolált pont, mert ekkor csak egyféle fokszám szerepelne, így az egyik fok az 1 kell legyen (hiszen 1 fokú csúcs minden legalább 2 csúcsú fában szerepel). (1 pont)
Az 1-től különböző fokú csúcsok fokszámát jelöljük k-val, ekkor $k \neq 1$ és k fokú csúcsból 5,6 vagy 7 darab lesz, 1 fokúból pedig (rendre) 7,6,5. Az összfokszám így $5k+7$ (1. eset), $6k+6$ (2. eset) vagy $7k+5$ (3. eset). (1 pont)
Mivel a 12 csúcsú gráfunk körmentes, a tanultak szerint legfeljebb 11 éle lehet, így az összfokszám legfeljebb 22. (1 pont)
1.eset: $5k+7 \leq 22$. Ekkor $k \leq 3$, de figyeljük meg azt is, hogy $k \neq 1$ és k páratlan kell legyen (hiszen $5k+7$ az összfokszám, ami páros). Így ekkor $k=3$ és az élszám 11. (1 pont)
Ilyen gráf létezik is: nem nehéz olyan fát konstruálni, aminek öt darab 3 fokú és hét darab 1 fokú csúcsa van (és persze 11 éle). (1 pont)
2.eset: $6k+6 \leq 22$. Ekkor $k \leq 2$, vagyis $k=2$ (ekkor az élszám 9) vagy $k=0$ (ekkor az élszám 3). (1 pont)
Mind a két esetben van ilyen gráf: $k=2$-höz pl. három darab három élű út diszjunkt egyesítése, (1 pont)
$k=0$-hoz 6 izolált pont és három egy élű út egyesítése. (1 pont)
3. eset: $7k+5 \leq 22$. Ekkor $k \leq 2$, és k ismét páratlan kéne legyen (de nem 1), így ilyen k nem létezik. (1 pont)
A kérdéses élszám tehát 3, 9 és 11 lehet. (0 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
pontozási útmutató
2020. május 25.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

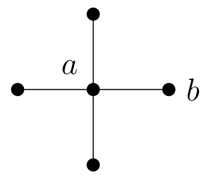
Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg?

* * * * *

Az állítás nem igaz, de pusztán ez a kijentés nem ér pontot. Jó ellenpélda megfelelő indoklással 10 pont. Kicsit hiányos indoklás esetén arányos részpontszámot adjunk, erősen hiányos indoklások nem feltétlen érnek pontot, mint ahogy a BFS bemutatása sem (akár általánosságban, akár konkrét gráfon). Jó ellenpéldából rengeteg van, a legegyszerűbb talán egy a középpű, legalább 4 ágú csillag (ahol b az a-n kívüli csúcsok bármelyike lehet, ld. az alábbi ábrán). Itt a BFS-nek van olyan a-ból indított futása, ami b-t ötödiknek éri el, de b-ből indítva a BFS-t a-t mindig másodiknak érjük el. Ha valaki a kezdőpontot nulladiknak tekinti és úgy oldja meg helyesen a feladatot, az természetesen maximális pontot kapjon.



2. Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont és minden csúcs foka páros. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzávehető egy él úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.

* * * * *

Egy összefüggő gráfnak akkor és csak akkor van Euler-sétája, ha legfeljebb két páratlan fokú csúcsa van (most elég az „akkor" irány is, az összefüggőség viszont nem hiányozhat). (1 pont)
A gráfunkhoz (hívjuk G-nek) egy élet hozzávéve (az így kapott gráf legyen G') nyilván két páratlan és hat páros fokú csúcsunk lesz, (1 pont)
így a továbbiakban G' összefüggőségét (és egyszerűségét) kell vizsgálnunk (mivel nincsenek izolált pontok, ezért az összefüggőség csakugyan szükséges is az Euler-séta létezéséhez, de erre nem kell kitérni). (1 pont)
Mivel G-ben minden fok páros és nincs izolált pont, minden fok legalább 2, így az egyszerűség miatt minden komponens legalább 3 csúcsú (nem kell pontot levonni, ha valaki nem említi az egyszerűséget, de helyes a következtetése), (2 pont)
a komponensek száma tehát legfeljebb 2. (1 pont)
Ha G-nek egy komponense van (vagyis összefüggő), akkor G' is összefüggő, (1 pont)
ekkor csak az egyszerűségre kell figyelnünk: mivel G nem teljes gráf (hiszen ekkor minden fok 7 lenne), találunk olyan élet, mely nincs behúzva G-ben. (1 pont)
Ha G-nek két komponense van, akkor az új élet a két komponens közé behúzva összefüggő gráfot kapunk, (1 pont)
amely nyilván egyszerű is. (1 pont)

Szempontok a pontozáshoz másképp felépített megoldások esetére: a fokszámokkal kapcsolatos megfigyelés 1 pontot ér, az a felismerés, hogy az összefüggőséggel kell foglalkozni 1 pont, ennek indoklása további 1 pont. A maradék 7 pont annak belátásáért jár, hogy az új él hozzávételével elérhető, hogy a gráf egyszerű és összefüggő legyen.

3. A 9 csúcsú G gráf egy 3 és egy 7 csúcsú körből áll úgy, hogy a v csúcs mindkét körben szerepel, de ezen kívül a köröknek nincs közös pontjuk. Határozzuk meg G komplementerének kromatikus számát.

* * * * *

Legyenek a 3 csúcsú kör csúcsai v, a, b, a 7 csúcsú kör csúcsai sorban v, c, d, e, f, g, h. Ekkor a va, vb, ab élek egyike sem szerepel G-ben, (1 pont)
így a v, a, b csúcsokat színezhetjük 1-es színűre. (1 pont)
Mivel a cd, ef, gh élek sem szerepelnek G-ben, (1 pont)
megszínezhetjük a c, d csúcsokat a 2-es, az e, f csúcsokat a 3-as, a g, h csúcsokat a 4-es színnel. (1 pont)
A kromatikus szám tehát legfeljebb 4, hiszen találtunk egy jó 4-színezést. (1 pont)
Az a, c, e, g pontok egy 4 csúcsú klikket alkotnak a gráfban, (4 pont)
ahonnan következik, hogy a kromatikus szám legalább 4. A két becslésből adódik, hogy a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)

Jó színezésért 4 színnel tehát 4 pont jár, jó 4 méretű klikkért szintén 4 pont, a maradék két pont pedig azért jár, ha valaki ezek ismeretében helyesen indokolja meg, hogy a kromatikus szám 4. Gyengébb becslésekért nem jár pont.

4. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 10. Igaz-e, hogy ekkor a minimális lefogó ponthalmaz mérete is legalább 10?

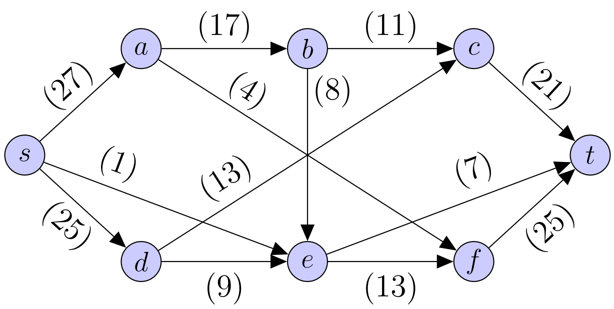
* * * * *

Első megoldás. Legyen L a gráf egy tetszőleges lefogó csúcshalmaza. Ha L azonos a gráf csúcshalmazával, akkor természetesen 20 eleme van, ellenkező esetben létezik olyan v csúcs, mely nincs benne L-ben. (2 pont)
Ekkor a v-ből induló élek lefogásához v összes szomszédjának benne kell lennie L-ben. (5 pont)
Mivel v fokszáma legalább 10 és a gráf egyszerű, L legalább 10 elemű kell legyen. (2 pont)
Mivel tetszőleges lefogó ponthalmaz legalább 10 elemű, ugyanez igaz a minimális lefogó ponthalmaz(ok)ra is. (1 pont)
Aki az $|L| = 20$ esettel nem foglalkozik, az 1 pontot veszítsen.

Második megoldás. Az előadásról tudjuk, hogy a független pontok maximális számának és a lefogó pontok minimális számának összege a csúcsszám, (1 pont)
így elég azt megmutatnunk, hogy az utóbbi szám legfeljebb 10. (1 pont)
Ha a gráf egy tetszőleges v csúcsa egy legalább 11 csúcsú F független ponthalmazba tartozna, akkor F csúcsai közül eggyel sem lenne összekötve, (4 pont)
így a gráf egyszerűsége miatt (1 pont)
a fokszáma legfeljebb 9 lehetne. (3 pont)

Harmadik megoldás. Dirac tétele szerint a gráfban van Hamilton kör, (1 pont)
hiszen a gráfban minden fok legalább a csúcsszám fele (1 pont)
és a gráf egyszerű. (1 pont)
A gráfnak páros számú csúcsa van, így a Hamilton-kör minden második élét véve teljes párosítást kapunk, (3 pont)
aminek tehát 10 éle van. (1 pont)
Ismert az előadásról, hogy a lefogó pontok minimális száma legalább akkora, mint a maximális párosítás mérete, (2 pont)
így a lefogó pontok minimális száma legalább 10. (1 pont)
Az utolsó 3 pont annak jár, aki érdemi észrevételeket tesz a maximális párosítással kapcsolatban is. Elszórt becslésekért, melyek egyetlen megoldás irányába sem mutatnak, nem jár pont.

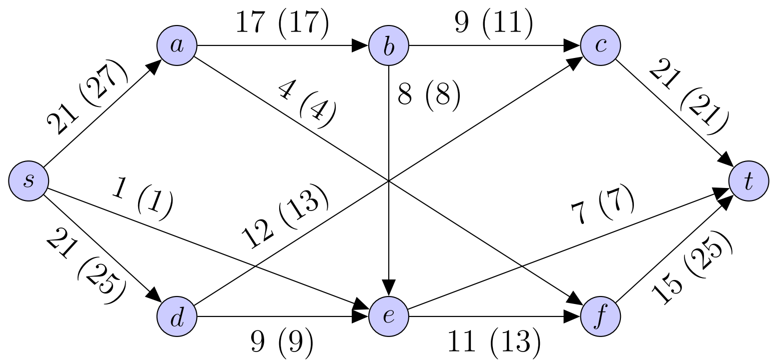
5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális $s-t$ vágást.



* * * * *

Az $\{s, a, b, c, d\}$ vágás kapacitása 43, (2 pont)
hiszen ennyi az se, af, be, ct, de élek kapacitásainak összege. (2 pont)
Az alábbi ábrán látható folyam értéke szintén 43, (2 pont)
hiszen ennyi az s-ből kifele mutató éleken vett folyamértékek összege, s-be mutató él pedig nincs (így az ilyeneken vett folyamértékek összege 0). (1 pont)

Szigorúan véve azt is indokolni kéne, hogy az ábrán csakugyan folyam látható (vagyis kéne írni arról, hogy miért teljesülnek a folyamhoz szükséges feltételek), de ennek hiányáért most ne vonjunk le pontot. Ha a dolgozatban folyamként megadott ábra nem folyamot ábrázol, akkor el kell dönteni, hogy elírásról vagy elvi hibáról van-e szó. Ha meggyőző bizonyíték van rá, hogy elírás történt, akkor kevés (pl. 1) pontot vonjunk le, ellenkező esetben viszont egyáltalán nem jár pont erre a részre.



Az előadáson tanultak szerint egyetlen vágás kapacitása sem lehet kisebb, mint egy tetszőleges folyam értéke, (2 pont)
így bármely vágás kapacitása legalább 43 kell legyen, tehát $\{s, a, b, c, d\}$ minimális vágás. (1 pont)

Az utolsó 3 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott vágás minimális. Ez persze történhet máshogy is, mint a fenti megoldásban (pl. a javítóutas algoritmus futtatásával és annak a leírásával, hogy az utolsó segédgráfban ezek a pontok érhetők el s-ből), de üres frázisok, mint pl. „a Ford-Fulkerson tétel miatt" nem érnek pontot. Aki a javítóutas algoritmust futtatja, annak nem kell belátnia, hogy folyamot kapott és azt sem, hogy annak értéke 43, hiszen ezek következnek az előadáson tanultakból.

6*. Egy 20 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak 22 éle van. Döntsük el, hogy a gráf síkbarajzolható-e.

* * * * *

A gráf síkbarajzolható lesz, ezt indirekten bizonyítjuk. (0 pont)
Tegyük fel, hogy a gráf nem síkbarajzolható. Ekkor Kuratowski tétele szerint tartalmaz olyan H részgráfot, mely topologikusan izomorf a $K_{3,3}$ vagy a K_5 gráffal. (1 pont)
H-ban így kell legyen kör, (1 pont)
melynek egy élét G-ből elhagyva a kapott gráf (nevezzük G_1-nek) összefüggő lesz az előadáson tanultak szerint. (2 pont)
G_1-ben lesz olyan H_1 részgráf, mely topologikusan izomorf egy olyan gráffal, melyet $K_{3,3}$-ból vagy K_5-ből kapunk egy körben szereplő él elhagyásával. (2 pont)
Így H_1-ben is kell legyen kör, (1 pont)
melynek egy élét G_1-ből elhagyva a kapott gráf (nevezzük G_2-nek) megint csak összefüggő lesz az előadáson tanultak szerint. (1 pont)
Az eljárást még kétszer meg tudjuk ismételni (hiszen $K_{3,3}$-nak néggyel, K_5-nek hattal több éle van, mint egy feszítőfájuk élszáma). (1 pont)
A négyszeri élelhagyás után kapott G_4 gráf viszont 20 csúcsú, 18 élű és összefüggő lenne, ami az előadáson tanultak szerint lehetetlen. (1 pont)

Szempontok a pontozáshoz másképp felépített megoldások esetére:

G-ből 3 él elhagyható úgy, hogy körmentes gráfot kapjunk 2 pont, ennek indoklása 1 pont. A Kuratowski-gráfokra ez nem igaz 2 pont, ennek indoklása 1 pont. Így ez a Kuratowski-gráfok valamelyikével topologikusan izomorf gráfokra sem igaz (és így azokra sem, amelyek ilyet tartalmaznak) 2 pont, ennek indoklása 1 pont. Tehát a Kuratowski-tétel szerint a gráf síkbarajzolható 1 pont.