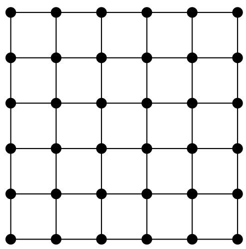
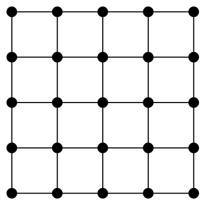
Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok
2019.05.03.

1. Az $r = 1, 2, \dots, 9$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 10 csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.)

2. Legyen a G teljes gráf csúcshalmaza $V(G) = (1, 2, ..., 10)$. Hagyjuk most el G-ből az $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ és a $(4, 5), (4, 6), (5, 6)$ éleket. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

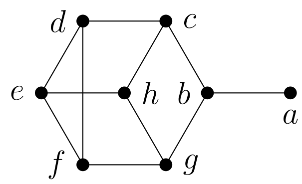
3. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy van-e Hamilton-körük.





4. Egy 20 csúcsú, 18 élű gráfnak két komponense van. Mutassuk meg, hogy a gráf síkbarajzolható.

5. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



6*. Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden fok 5 vagy 6. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van teljes párosítása.

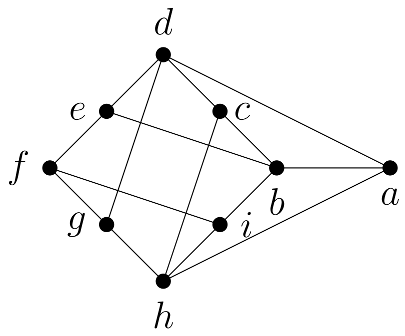
A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
2019.05.20.

1. Adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



2. A G gráfról annyit tudunk, hogy a $K_{9,9}$ teljes páros gráfból kaptuk 8 él törlésével. Határozzuk meg G élkromatikus számát.

3. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $n \geq 5$ csúcsú fa, melyben pontosan két fokszám fordul elő, mégpedig mindkettő $\frac{n}{2}$-ször (n páros).

4. Egy gráf csúcsai egy 6 elemű halmaz 3 elemű részhalmazai, két különböző csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. Van-e Euler-körséta a gráfban?

5. Egy 10 csúcsú páros gráfhoz hozzáveszünk két élet. Előfordulhat-e (a gráf és a hozzávenni kívánt élek alkalmas választásával), hogy a kapott gráf kromatikus száma 4?

6*. Bejárható-e egy 3×5-ös sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőn éppen egyszer tartózkodik a ló? (A ló a táblán úgy ugrik, hogy két mezőt halad egy irányba (vízszintesen vagy függőlegesen) és egy mezőt az első irányra merőlegesen.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
aláíráspótló zárthelyi feladatok
2019.05.29.

1. Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, melynek számjegyei különbözők és szomszédos jegyei felváltva párosak, illetve páratlanok? (Tehát például 123456 és 250143 megfelelő számok.) Ne feledkezzünk el a megoldás indoklásáról.

2. Egy két komponensű egyszerű gráfban pontosan négy csúcs foka páratlan. Azt is tudjuk, hogy a komponensek egyikében sincs Euler-körséta. Igaz-e mindig, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni két élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája?

3. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \le i \le 9$ és $1 \le j \le 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

4. Egy gráf csúcsai legyenek az $1, 2, \ldots, 100$ számok, két különböző csúcsot kössünk össze, ha a megfelelő számoknak közös osztója a 2, a 3 és az 5 közül legalább egy. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

5. Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden csúcs foka legalább 9. Mutassuk meg, hogy ebből nem következik, hogy a gráfnak van Hamilton-útja.

6*. A G gráfról annyit tudunk, hogy a 9 csúcsú teljes gráfból kaptuk 4 él törlésével. Előfordulhat-e, hogy G élkromatikus száma 8?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2019. május 3.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Az $r = 1, 2, \ldots, 9$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 10 csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.)

* * * * *

Az Euler-körséta létezésének szükséges és elégséges feltétele hogy a gráfban minden fokszám páros legyen (1 pont)
és a gráf összefüggő legyen (precízebben: legfeljebb egy olyan komponense legyen, amelyben van él, de persze ennek hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Az $r = 1, 3, 5, 7, 9$ értékekre tehát nem lesz a kérdéses gráfoknak Euler-körsétájuk. (1 pont)
Az $r = 2$ és $r = 4$ esetekre is nemleges a válasz, (1 pont)
mert létezik olyan 2-reguláris, illetve 4-reguláris 10 csúcsú gráf, melynek nincs Euler-körsétája. (1 pont)
Ilyen például az $r = 2$ esetben két 5 csúcsú kör uniója, az $r = 4$ esetben pedig két 5 csúcsú teljes gráf uniója. (2 pont)
Az $r = 6$ és $r = 8$ esetekben viszont pozitív lesz a válasz, hiszen a 10 csúcsú, 6- és 8-reguláris egyszerű gráfok összefüggők. (1 pont)
Ez következik pl. a Dirac-tételből (mely szerint ezeknek a gráfoknak még Hamilton-körük is van), de abból is könnyen látható, hogy az ilyen gráfoknak minden komponense legalább 7 csúcsú kell legyen, így csak egy komponensük lehet. (2 pont)

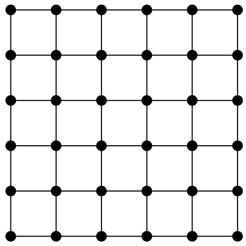
2. Legyen a G teljes gráf csúcshalmaza $V(G) = (1, 2, ..., 10)$. Hagyjuk most el G-ből az $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ és a $(4, 5), (4, 6), (5, 6)$ éleket. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

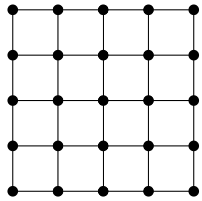
* * * * *

A gráfot meg lehet jól színezni 6 színnel: (1 pont)
az $1, 2, 3$ csúcsok kapják az első, a $4, 5, 6$ csúcsok a második színt, a $7, 8, 9, 10$ csúcsok pedig egyet-egyet

a maradék négyből. (Itt jó, ha valaki röviden kitér arra, hogy ez miért jó színezés, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.) (3 pont)
A gráfban van egy 6 csúcsú klikk, (1 pont)
hiszen (pl.) az $1, 4, 7, 8, 9, 10$ csúcsok klikket alkotnak. (3 pont)
A gráfot tehát 6-nál kevesebb színnel nem lehet megszínezni, (1 pont)
a keresett kromatikus szám az eddigieket felhasználva tehát 6. (1 pont)

3. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy van-e Hamilton-körük.





* * * * *

Az első gráfnak van Hamilton-köre. Aki megad egy ilyet vagy más módon bizonyítja a létezését, az kapjon erre 3 pontot. Pusztán annak közlése, hogy van Hamilton-kör, nem ér pontot.

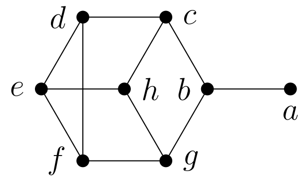
A második gráfban nincs Hamilton-kör, (1 pont)
ugyanis ez 25 csúcsú páros gráf, (1 pont)
így a kisebbik, 12 csúcsú osztályt elhagyva 13 komponens keletkezik, ami (az órán tanultak szerint) Hamilton-kört tartalmazó gráfok esetén nem fordulhat elő (k csúcsot elhagyva legfeljebb k komponens keletkezhet). (2 pont)
A maradék 3 pont akkor jár, ha valaki belátja, hogy a gráf csakugyan páros, ez többféleképp is történhet, a legegyszerűbb megadni egy jó 2-színezést.
Természetesen máshogy is lehet érvelni, meg lehet adni pl. azt a 12 pontot, melyeket elhagyva 13 komponens keletkezik vagy ki lehet színezni a csúcsokat sakktáblaszerűen (ez azonos lesz egy jó 2-színezéssel) és belátni, hogy az esetleges Hamilton-körben a 25. lépésben a kezdőponttól eltérő színű csúcsba érkezünk.

4. Egy 20 csúcsú, 18 élű gráfnak két komponense van. Mutassuk meg, hogy a gráf síkbarajzolható.

* * * * *

Fel fogjuk használni azt az előadáson tanult állítást, hogy egy összefüggő n csúcsú gráfnak legalább $n-1$ éle van. (1 pont)
Ha a két komponens a, illetve $20-a$ csúcsú, akkor ezek szerint legalább $a-1$, illetve $20-a-1$ élet tartalmaznak. (1 pont)
Mivel e két szám összege 18, ami épp a gráf élszáma, a két komponens pontosan $a-1$, illetve $20-a-1$ élet kell tartalmazzon. (2 pont)
Ezek szerint mindkét komponens fa, (2 pont)
ellenkező esetben elhagyható lenne belőlük egy él (valamelyik körből) úgy, hogy a komponens továbbra is összefüggő legyen, ez viszont az említett állítás miatt lehetetlen. (1 pont)
A fák pedig síkbarajzolhatók, (1 pont)
hiszen a nem síkbarajzolható gráfok Kuratowski tétele szerint tartalmaznak K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, (1 pont)
az ilyenek pedig tartalmaznak kört. (1 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



* * * * *

A gráfban a maximális fok 3, (1 pont)
és a gráf egyszerű, (1 pont)
így Vizing tétele szerint az élkromatikus száma legfeljebb 4. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy az élkromatikus szám pontosan 4. Tegyük fel indirekten, hogy a gráf éleit meg lehet színezni 3 színnel. (1 pont)
Bármely színosztály párosítást kell alkosson, (1 pont)
így legfeljebb 4 élet tartalmazhat, hiszen a gráfnak 8 csúcsa van. (1 pont)
Mivel a gráfnak 11 éle van, a színosztályok közül kettőnek is 4 élűnek kell lennie (ha csak egy 4 élű lenne, akkor a három osztály együtt legfeljebb $3 + 3 + 4 = 10$ élet tartalmazhatna). (2 pont)
Ez azonban lehetetlen, hiszen a 4 élű párosítások minden csúcsot fednek, így minden csúcs foka legalább 2 kéne legyen, az a csúcs foka viszont csak 1. (2 pont)

Természetesen más megoldások is vannak, a 4-élszínezhetőséget konstruktívan is meg lehet mutatni, az alsó becslést pedig arra a gráfra is be lehet látni, amelyet az eredetiből az (a, b) él elhagyásával kapunk. Egy további alternatív lehetőség az alsó becslésre:

Tegyük fel indirekten, hogy a gráf éleit meg lehet színezni 3 színnel. (1 pont)
Ekkor az e csúcsból menő élek és a (d, f) él színe (a színek permutációinak erejéig) egyértelműen megadható (pl. (e, d) 1-es, (e, f) 2-es, (e, h) és (d, f) 3-as. (3 pont)
Így már a (c, d) és (f, g) élek színe is egyértelmű (példánkban (c, d) 2-es, (f, g) 1-es), (1 pont)
innen pedig a (c, h) és (g, h) élek színe is megadható (1, illetve 2). (1 pont)
Ekkor a (b, c) és (b, g) éleknek egyforma színűeknek kéne lenniük, ami lehetetlen, a feltételezett 3-élszínezés tehát nem létezik. (1 pont)

Ha valaki máshogy kezdi el a feltételezett élszínezést, akkor az indirekt feltevés után (amire 1 pontot adjunk) valószínűleg esetszétválasztásra lesz szüksége, ennek a felismerésére 2 pontot adjunk, az esetek helyes kezelésére (amikből minden valószínűség szerint kettő lesz) külön-külön 2-t.

6*. Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden fok 5 vagy 6. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van teljes párosítása.

* * * * *

Első megoldás. Legyen a 6 fokú csúcsok száma a gráfban k. (1 pont)
Ekkor a gráfnak $50 + \frac{k}{2}$ éle van. (1 pont)
Most megmutatjuk, hogy a gráfban a lefogó pontok minimális száma legalább 10, ahonnan Kőnig tétele szerint a feladat állítása már következik, hiszen páros gráfban a lefogó pontok minimális száma és a maximális párosítás mérete azonos. (1 pont)
9 pont legfeljebb $45 + k$ élet tud lefogni, hiszen csak k darab 6 fokú csúcs van a gráfban. (2 pont)
Az is igaz, hogy 9 csúcs k értékétől függetlenül legfeljebb 54 élet fog le. (2 pont)
Mindezek alapján ha 9 csúccsal le lehetne fogni minden élet, akkor egyfelől $50 + \frac{k}{2} \leq 54$, (1 pont)
másfelől $50 + \frac{k}{2} \leq 45 + k$ teljesül. (1 pont)
Az első egyenlőtlenség alapján $k \leq 8$, a második alapján $k \geq 10$ kéne teljesüljön, ami lehetetlen. (1 pont)

Második megoldás. A Frobenius-tételt fogjuk használni, ehhez először is belátjuk, hogy a gráf mindkét osztályában (legyenek ezek A és B) 10 csúcs van. (1 pont)

Ha az egyik osztályban legfeljebb 9 csúcs lenne, akkor az innen kimenő élek száma legfeljebb $9 \cdot 6 = 54$ lenne, míg a másik osztályból kimenő élek száma legalább $11 \cdot 5 = 55$. (2 pont)
Mivel mindkét szám a gráf élszámával azonos, ellentmondást kaptunk. (1 pont)
A Hall-feltétel ($\forall X \subseteq A : |N(X)| \geq |X|$) ellenőrzéséhez legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Ha $1 \leq |X| \leq 5$, akkor $|N(X)| \geq 5$ miatt $|N(X)| \geq |X|$ nyilván teljesül (és $X = \emptyset$ is rendben van, ennek hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Ha $|X| \geq 6$, akkor megmutatjuk, hogy $N(X) = B$, amiből a kívánt egyenlőtlenség következik. (2 pont)
Ha $N(X) = B$ nem teljesülne, akkor lenne olyan v csúcs B-ben, melynek nincs X-beli szomszédja, (2 pont)
így viszont a foka legfeljebb 4 lehetne, hiszen A 10 csúcsú és ebből legalább 6 X-beli. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2019. május 20.

Általános alapelvek.

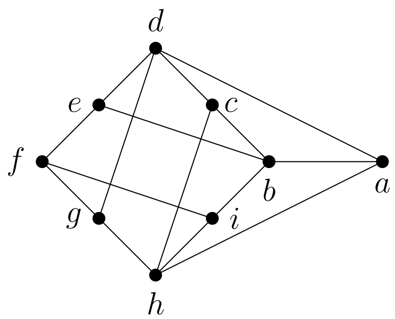
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



* * * * *

Első megoldás. A $\{b, d, f, h\}$ halmaz egy 4 elemű lefogó ponthalmaz (mivel a maradék csúcsok közt nem megy él). (3 pont)
Az ab, cd, ef, gh élek 4 élű párosítást alkotnak, (2 pont)
vagyis a $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség szerint (mely minden gráfban teljesül) (2 pont)
a gráfnak nem létezik 4 csúcsúnál kisebb lefogó ponthalmaza, (2 pont)
így $\{b, d, f, h\}$ minimális lefogó ponthalmaz. (1 pont)

Második megoldás. A $\{b, d, f, h\}$ halmaz egy 4 elemű lefogó ponthalmaz (mivel a maradék csúcsok közt nem megy él). (3 pont)
A gráfnak 15 éle van és a maximális fokszáma 4, így minden lefogó ponthalmaz legalább 4 csúcsot kell, hogy tartalmazzon, (3 pont)
hiszen egy legfeljebb 3 elemű csúcshalmazra legfeljebb 12 él illeszkedne. (3 pont)

$\{b, d, f, h\}$ tehát minimális lefogó ponthalmaz lesz. (1 pont)

Harmadik megoldás. A $\{b, d, f, h\}$, illetve $\{a, c, e, g, i\}$ halmazokon belül nem megy él és együtt lefedik a gráf csúcsait, G tehát páros gráf. (2 pont)
Az ab, cd, ef, gh élek 4 élű párosítást alkotnak, (2 pont)
így $\nu(G) \geq 4$. (1 pont)
Mivel a gráfnak 9 csúcsa van, $\nu(G) = 4$ is teljesül, hiszen 5 élű párosításhoz 10 csúcs lenne szükséges. (1 pont)
Mivel G páros gráf, Kőnig tétele szerint $\tau(G) = \nu(G) = 4$. (2 pont)
A páros gráf egyik osztályát alkotó $\{b, d, f, h\}$ lefogó ponthalmaz így minimális lesz. (2 pont)

2. A G gráfról annyit tudunk, hogy a $K_{9,9}$ teljes páros gráfból kaptuk 8 él törlésével. Határozzuk meg G élkromatikus számát.

* * * * *

Első megoldás. A $K_{9,9}$ gráfban 18 darab 9 fokú csúcs van, (1 pont)
így 8 él törlése után még lesz olyan csúcs (legalább 2 is), melynek foka 9 marad, (2 pont)
hiszen csak a 8 él legfeljebb 16 végpontjának változik (csökken) a fokszáma. (2 pont)
A maximális fokszám a G gráfban így 9, (1 pont)
tehát G élkromatikus száma is 9, (1 pont)
mert Kőnig (élszínezésre vonatkozó) tétele szerint bármely páros gráf élkromatikus száma azonos a maximális fokával. (Szigorúan véve be kéne látni, hogy G páros gráf, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.) (3 pont)

Második (nem túlságosan különböző) megoldás. A $K_{9,9}$ gráf élszínezhető 9 színnel, mivel Kőnig (élszínezésre vonatkozó) tétele szerint bármely páros gráf élkromatikus száma azonos a maximális fokával, ez pedig a $K_{9,9}$-ben 9. (3 pont)
Így természetesen G is élszínezhető 9 színnel. (1 pont)
Ennél kevesebb szín viszont nem elég, mert a maximális fokszám alsó becslés az élkromatikus számra, (1 pont)
és a $K_{9,9}$ gráf 18 darab 9 fokú csúcsából (1 pont)
8 él törlése után még marad 9 fokú, (2 pont)
hiszen csak a 8 él legfeljebb 16 végpontjának változik (csökken) a fokszáma. (2 pont)

3. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $n \geq 5$ csúcsú fa, melyben pontosan két fokszám fordul elő, mégpedig mindkettő $\frac{n}{2}$-ször (n páros).

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy létezik ilyen fa. (1 pont)
Az első pont akkor is jár, ha valaki expliciten nem mondja ki, hogy így indul el, de az érdemi megoldási kísérlete ezen alapul.
A két fokszám közül az egyik az 1 kell legyen, mert minden (legalább 2 csúcsú – ennek hiányáért ne vonjunk le pontot) fának van 1 fokú csúcsa. (2 pont)
Legyen a másik x, ekkor a gráf fokszámösszege $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}x$. (2 pont)
A fának tehát $\frac{n}{4}(x + 1)$ éle van. (1 pont)
Másrészt tudjuk, hogy bármely n csúcsú fa élszáma $n - 1$, így $\frac{n}{4}(x + 1) = n - 1$. (1 pont)
Innen $n(x+1) = 4n-4$. Mivel $n(x+1)$ és $4n$ is osztható n-nel, 4 is osztható kell legyen n-nel, (2 pont)
ami $n \geq 5$ miatt lehetetlen, ezzel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

Persze az $n(x + 1) = 4n - 4$ egyenlőségből számos más módon is ellentmondásra juthatunk, pl. n-nel való osztást követően kiderül, hogy x legfeljebb 2 lehet, mivel azonban 0 és 1 nem jön szóba, $x = 2$ kell legyen, erre viszont $n = 4$ adódik, ami ellentmondás.

4. Egy gráf csúcsai egy 6 elemű halmaz 3 elemű részhalmazai, két különböző csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. Van-e Euler-körséta a gráfban?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az Euler-körséta létezésének szükséges és elégséges feltétele hogy a gráfban minden fokszám páros legyen (1 pont)
és a gráf összefüggő legyen (precízebben: legfeljebb egy olyan komponense legyen, amelyben van él, de persze ennek hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Legyen a 6 elemű halmaz $H = \{a, b, c, d, e, f\}$, a gráf egy tetszőleges csúcsa (mondjuk) $v = \{a, b, c\}$. H azon részhalmazainak száma, melyeknek v-vel pontosan 1 közös elemük van 9. (1 pont)
Ez azért igaz, mert ilyen halmazhoz az $\{a, b, c\}$ halmazból 1 elemet kell választanunk, amit háromféleképp tehetünk meg, (1 pont)
majd ezt a $\{d, e, f\}$ halmazból 2 elemmel kell kiegészítenünk, ami az első választástól függetlenül (1 pont)
háromféleképp tehető meg. (1 pont)
Olyan, v-től különböző háromelemű halmaz, melynek egyetlen közös eleme sincs v-vel pontosan 1 van (éspedig $\{d, e, f\}$), a v csúcs foka így 10, és persze ugyanez igaz a gráf összes többi csúcsára is. (1 pont)
Az összefüggőséget kell még vizsgálnunk. A gráfnak $\binom{6}{3} = 20$ csúcsa van, (1 pont)
így összefüggő, mert minden komponensében legalább 11 csúcsnak kell lennie, így két vagy több komponense nem lehet. (2 pont)

5. Egy 10 csúcsú páros gráfhoz hozzáveszünk két élet. Előfordulhat-e (a gráf és a hozzávenni kívánt élek alkalmas választásával), hogy a kapott gráf kromatikus száma 4?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Ha a gráfot (pl.) a $K_{5,5}$-nek választjuk, akkor ha az éleket különböző osztályokon belülre vesszük fel, akkor keletkezni fog egy K_4 részgráf, a kapott gráf kromatikus száma tehát legalább 4 lesz. (5 pont)
A kromatikus szám ugyanakkor ennél nagyobb nem lehet. (1 pont)
Az eredeti gráf ugyanis 2-színezhető volt (mondjuk az 1,2 színeket használjuk), (2 pont)
az újonnan felvett élek egy-egy végpontját 3-ra, illetve 4-re színezve pedig az új gráf jó színezését kapjuk. (2 pont)

Természetesen nincs feltétlen szükség a $K_{5,5}$-re, bármely olyan páros gráf megfelel, amiben van 4 hosszú kör.

6*. Bejárható-e egy 3×5-ös sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőn éppen egyszer tartózkodik a ló? (A ló a táblán úgy ugrik, hogy két mezőt halad egy irányba (vízszintesen vagy függőlegesen) és egy mezőt az első irányra merőlegesen.)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Tekintsük azt a gráfot, melyben a csúcsok a sakktábla mezői és két csúcs közt akkor vezet él, ha elérhetők egymásból lólépésben. Erről a gráfról kell eldöntenünk, hogy van-e Hamilton-útja. (1 pont)
Jelöljük a sorokat az 1,2,3 számokkal, az oszlopokat az a,b,c,d,e betűkkel. Ekkor a b1,b3,c2,d1,d3 mezőket elhagyva (3 pont)
hét komponens keletkezik, (2 pont)
éspedig az a1,a3,b2,d2,e1,e3 izolált pontok és az a2,c1,c3,e2 csúcsokból álló kör (elég bárhogy, akár egy rajzzal alátámasztani, hogy 7 komponens keletkezik). (3 pont)
Az órán (ezúttal Hamilton-út létezésére) tanult szükséges feltétel tehát nem teljesül, így a gráfban nincs Hamilton-út, vagyis a b) feladat bejárása sem megvalósítható. (1 pont)