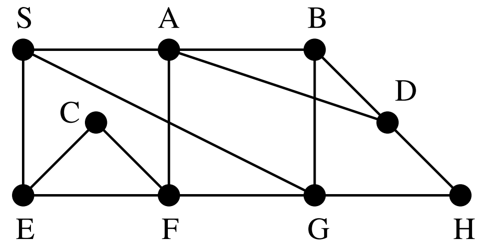
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2015. március 19.

1. Hány olyan 12 hosszúságú betűsorozat készíthető az angol abécé 26 betűjéből, amelyben pontosan 4 darab **X** és 3 darab **Y** betű szerepel?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

2. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legföljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G-nek?

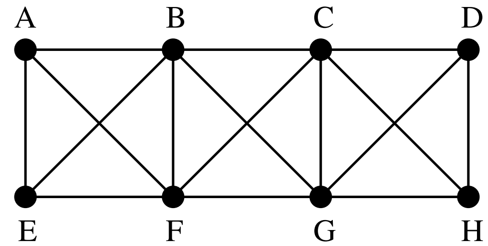
3. a) A BFS algoritmus az alábbi ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, □, H, □, F, C, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet az alábbi gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



4. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t.

5. Maximálisan hány élet lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk? (Egy él hozzávétele azt jelenti, hogy két meglévő csúcs közé húzunk be új élet, a gráfhoz további csúcsokat hozzávenni tehát nem szabad.)



6. A G gráf egy 101 csúcsú „csillag" – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100 fokú és száz 1 fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

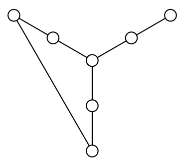
Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zh, 2015.04.23.

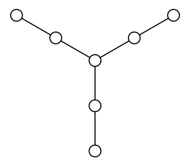
1. Egy sakktáblán világos és sötét huszárok állnak, összesen hét darab. Mindegyik huszár legalább két ellenséges huszárt tud ütni. Mutassuk meg, hogy a világos huszárok mind azonos színű mezőn állnak.

2. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás.

3. Egy 100 csúcsú teljes gráfból elhagyjuk egy Hamilton-körének éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

4. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.

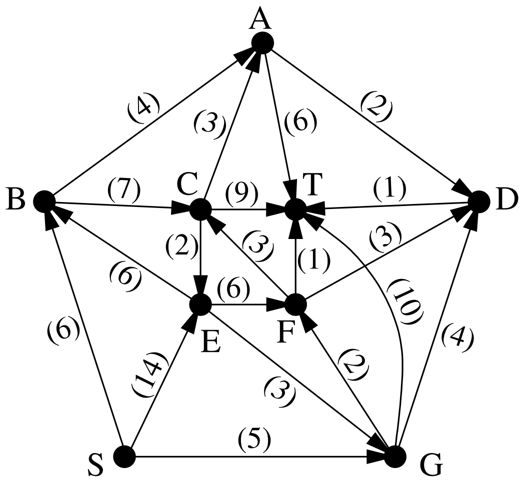




5. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



Minden feladat 10 pontot ér. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2015. május 4.

1. Hány olyan 5 elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, amelyikben több a páros szám, mint a páratlan?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

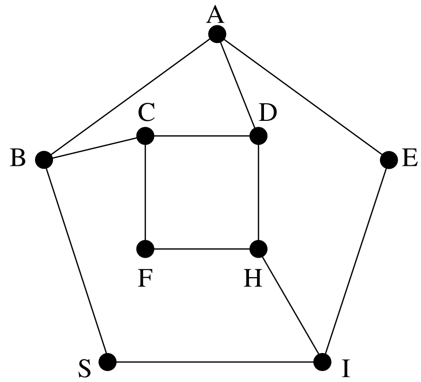
2. Létezik-e olyan 21 csúcsú G egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy G és annak a $\overline{G}$ komplementere is tartalmaz 9 darab 4 fokú és 3 darab 10 fokú pontot?

3. A jobbra látható ábráról „véletlenül" lemaradt a gráf egy éle (de a csúcsok mind rajta vannak). Megállapítható-e biztosan, hogy a hiányzó él melyik két csúcsot kötötte össze, ha tudjuk, hogy az S-ből indított BFS algoritmus a gráf csúcsait az alábbi sorrendben járta be:

a) S, B, I, C, A, F, H, E, D;

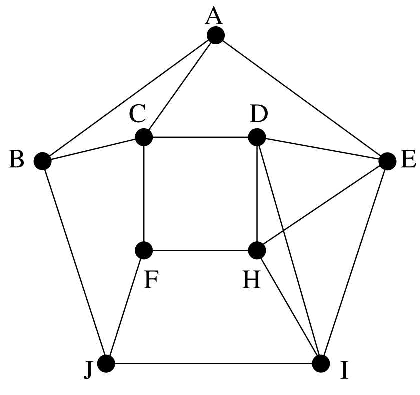
b) S, I, B, E, F, H, C, A, D?

Ahol a válasz az, hogy a hiányzó él egyértelműen megállapítható, ott adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát is.



4. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t.

5. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



6. A 30 csúcsú G összefüggő, egyszerű gráf csúcsai közül 10-et pirosra, 10-et kékre, 10-et zöldre színeztünk. Tudjuk, hogy minden csúcs legalább 5, vele azonos színű csúccsal szomszédos. Mutassuk meg, hogy G-ben van legalább 25 élből álló út.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

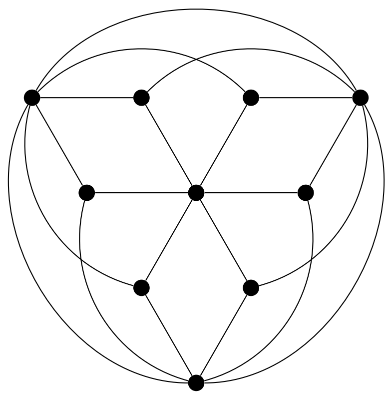
Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2015. május 4.

1. Határozzuk meg az alább látható gráf kromatikus számát.

2. Határozzuk meg az alább látható gráfban a független élek maximális számát.

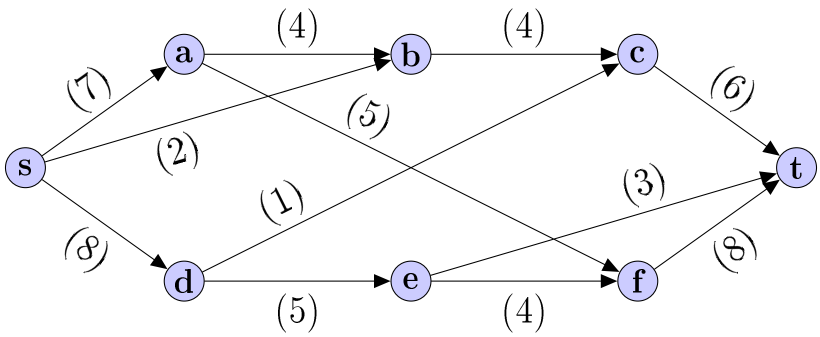


3. Legyen G olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyre G-ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.

4. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

5. Mutassuk meg, hogy ha G 9 csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Aláíráspótló vizsga — az ELSŐ zárthelyi pótlására

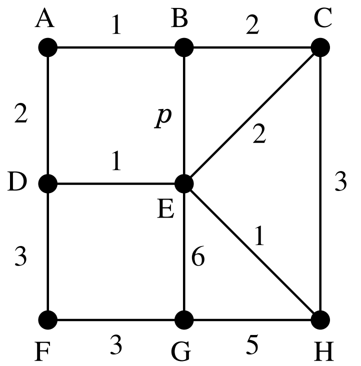
2015. május 20.

1. 10 házaspár elment tangózni. Hányféleképpen alkothattak 10 táncospárt, ha mindenki ellenkező neművel táncolt és a 10 táncospár közül pontosan 7 tagjai alkottak egyben házaspárt is?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

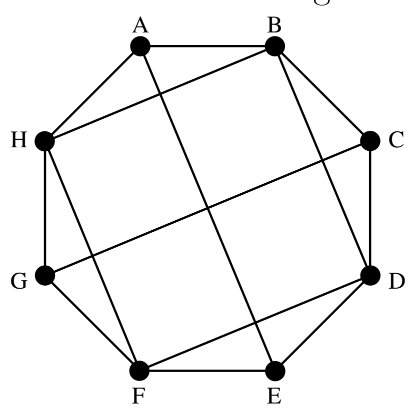
2. Egy 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 pont foka 5, a maradék 10 pont foka 14. Összefüggő-e a G gráf $\overline{G}$ komplementere?

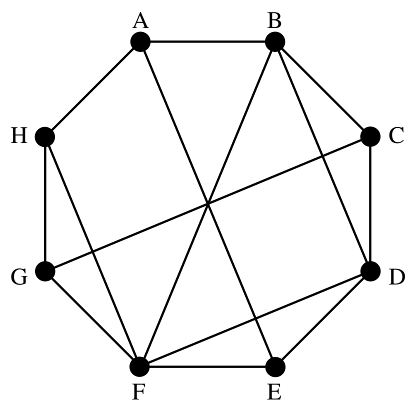
3. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára *illeszkedőnek*, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F. Legföljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik?

4. A p pozitív valós paraméter minden értékére határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát az alábbi gráfban.



5. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?





6. A G gráf tartalmaz olyan zárt körsétát, amely G minden élét páratlan sokszor tartalmazza. Igaz-e mindig, hogy ekkor G tartalmaz Euler-körsétát is?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Aláíráspótló vizsga — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2015. május 20.

1. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban minden fokszám 8. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

2. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban a maximális fokszám 6, a független élek maximális száma 5. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.

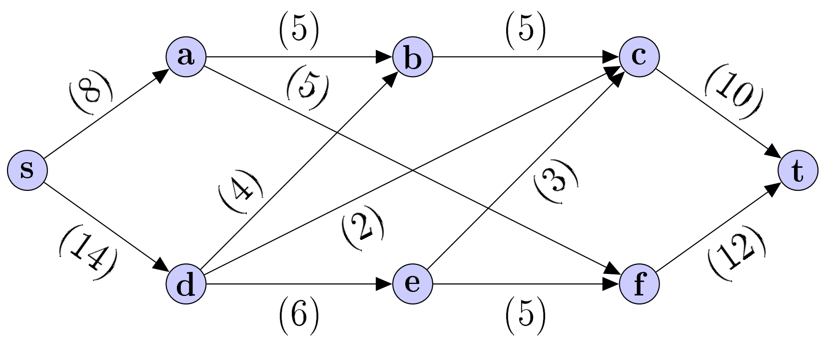
3. Egy 9 csúcsú egyszerű páros gráfban minden csúcs foka 2 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van 3 élű párosítás.

4. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban van egy 5, egy 4 és egy 3 fokú csúcs, minden más csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráf színezhető 3 színnel.

5. A 9 csúcsú G egyszerű gráfnak páratlan számú éle van. Mutassuk meg, hogy

$$\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 10.$$

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. március 19.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Hány olyan 12 hosszúságú betűsorozat készíthető az angol abécé 26 betűjéből, amelyben pontosan 4 darab **X** és 3 darab **Y** betű szerepel?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Először válasszuk ki a betűsorozat 12 tagja közül azt a 4-et, ahová az **X**-ek kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{12}{4} =$ (1 pont)

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. (2 pont)

Most a maradék 8 tag közül választjuk ki a 3 **Y** helyét. A lehetőségek száma itt $\binom{8}{3} =$ (2 pont)

$= \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. (1 pont)

Végül a sorozat 5 megmaradt helyére szabadon választhatunk az ábécé maradék 24 betűjéből. Erre nyilván 24^5 lehetőségünk van (hivatkozva az ismétléses variációnál tanultakra – vagy egyszerűen arra, hogy 5-ször egymás után 24 lehetőség közül választunk). (2 pont)
Mivel az először mondott $\binom{12}{4}$ lehetőség mindegyike $\binom{8}{3}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással; majd a kapott $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{3}$ lehetőség mindegyike 24^5-féleképp folytatható a harmadik választással, ezért az összes lehetőségek száma $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{3} \cdot 24^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$. (2 pont)

Nem jár pontlevonás azért ha a megoldó a 24^5 értékét nem fejti ki szorzás formájában. Megjegyezzük, hogy ha a megoldás során először az **Y**, utána az **X** betűk helyét választjuk meg, akkor az eredményt $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot 24^5$ alakban kapjuk meg (analóg gondolatmenettel); ez azonban számértékét tekintve azonos a fentivel. Egy harmadik megoldási lehetőség, ha először azt a 7 helyet választjuk ki, ahová **X** vagy **Y** betűk kerülnek, majd a választott 7 hely közül (például) azt a 4-et, ahová az **X**-ek. Ekkor $\binom{12}{7} \cdot \binom{7}{4} \cdot 24^5$ alakban jön ki ismét csak ugyanaz az eredmény.

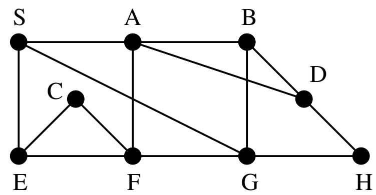
2. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legföljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G-nek?

* * * * *

Legyen a legföljebb 7 fokú csúcsok halmaza A, a legalább 16 fokúaké B. Ekkor tehát $|A| = |B| = 10$. Ha $v \in B$ tetszőleges, akkor a v-ből induló élek közül legföljebb 9 mehet B-beli csúcsba (hiszen G egyszerű), így legalább $d(v) - 9 \geq 7$ élnek A-beli csúcsba kell érkeznie. (2 pont)
Ez minden B-beli csúcsról elmondható, így összesen legalább $10 \cdot 7 = 70$ él megy B-ből A-ba.(2 pont)
Mivel az A-beliek foka legföljebb 7, ezért legföljebb $10 \cdot 7 = 70$ él érkezhet meg A-ba B-ből. (2 pont)
Mindebből következik, hogy A és B között pontosan 70 él megy és minden A-beli pont foka pontosan 7, a B-belieké pontosan 16. (2 pont)
Ezek szerint a G-beli pontok fokainak összege $10 \cdot 7 + 10 \cdot 16 = 230$, a G éleinek száma pedig (a tanultak szerint) ennek a fele, vagyis 115. (2 pont)

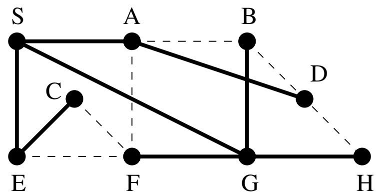
3. a) A BFS algoritmus az alábbi ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, $\square$, H, $\square$, F, C, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket $\square$ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet az alábbi gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



* * * * *

a) Az eljárás S után a szomszédait, vagyis A-t, G-t és E-t sorolja föl valamilyen sorrendben. Utánuk viszont az elsőként felsorolt S-szomszéd szomszédai következnek. Mivel H az A, G és E közül csak G-vel szomszédos, ezért S után G kell következzen. (1 pont)
H után G további szomszédai kell álljanak, így először B (majd a megadott F) következik. (1 pont)
Ezek után S másodjára felsorolt szomszédja (még el nem ért) szomszédainak kell állni. Mivel C az A és E közül csak E-vel szomszédos, ezért G után E, majd A kell következzen. (1 pont)
Az utolsó helyen nyilván a még fel nem sorolt D csúcs áll, vagyis a keresett sorozat: S, G, E, A, H, B, F, C, D. (1 pont)
A fentiekből az is majdnem mindenhol kiderült, hogy az eljárás az egyes csúcsokat melyik másik csúcsból éri el. Az egyetlen kivétel a D: ezt nyilván A-ból (mert D nem szomszédos G-vel és E-vel). Így tehát a bejáráshoz tartozó BFS-fa az alábbi (vastagított vonalakkal):



(3 pont)

b) Ha az S-ből indított BFS-algoritmushoz tartozó BFS fának éle az $\{u, v\}$, akkor az eljárás vagy u-ból érte el v-t, vagy fordítva. Mindkét esetben igaz, hogy u és v különböző távolságra van S-től (az utóbb elért csúcs távolsága 1-gyel nagyobb a másikénál). (2 pont)
Mivel D és H egyaránt 2 távolságra van S-től (ez például a BFS a) feladatbeli futtatásából is kiderül), ezért a $\{D, H\}$ nem lehet éle ilyen BFS-fának. (1 pont)

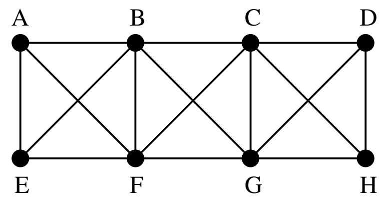
4. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t.

* * * * *

Első megoldás. Állítsuk w értéke szerinti növekvő sorrendbe G éleit úgy, hogy ha G-nek van e-n kívül más $w(e)$ súlyú éle is, akkor a $w(e)$ súlyúak közül e legyen elsőként felsorolva. (3 pont)
A minimális összsúlyú feszítőfa megkeresésére szolgáló Kruskal-algoritmust lefuttathatjuk az éleknek ebből a sorrendjéből kiindulva is (hiszen az algoritmus csak a w szerinti növekvő sorrendet írja elő, az azonos súlyú élek sorrendje közömbös). (2 pont)
Mivel a Kruskal-algoritmus (a tanult tétel szerint) minimális összsúlyú feszítőfát ad, megoldjuk a feladatot, ha megmutatjuk, hogy a kapott F feszítőfa tartalmazza e-t. (1 pont)
Jelölje az e előtt az eljárás által kiválasztott élek halmazát F_0. A Kruskal-algoritmus csak akkor döntene úgy, hogy e-t nem veszi be F élei közé, ha $F_0 \cup \{e\}$ kört tartalmazna. Ez azonban valóban lehetetlen: az élek sorrendjének fenti megválasztása miatt az eljárás a v-re illeszkedő élek közül először foglalkozik e-vel, így az $F_0 \cup \{e\}$ által alkotott részgráfban v foka 1, márpedig egy kör éleinek végpontjai nyilván legalább 2 fokúak lennének. Ezzel tehát az állítást beláttuk. (4 pont)

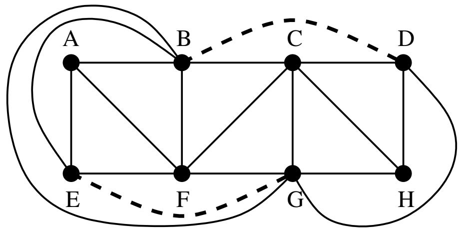
Második megoldás. Legyen F egy tetszőleges, minimális összsúlyú feszítőfa (a w élsúlyozás szerint). Ha F tartalmazza e-t, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel ezért, hogy nem tartalmazza. (1 pont)
Mivel F összefüggő, ezért tartalmaz egy P utat e két végpontja között. Legyen P-nek a v-re illeszkedő (egyetlen) éle f. Hagyjuk ki F-ből f-et és vegyük be helyette e-t; a kapott részgráfot jelölje F'. Állítjuk, hogy F' is egy feszítőfa. (3 pont)
Ha F-hez hozzávesszük e-t, létrejön egy kör (hiszen a P út e-vel körré záródik). Az előadáson tanultak szerint összefüggő gráfból egy kör egy tetszőleges élét elhagyva összefüggő gráfot kapunk. Így F' összefüggő, mert az élhalmazát $E(F) \cup \{e\}$-ből f elhagyásával kaptuk. Továbbá mivel F és F' élszáma azonos, ezért F' körmentes is: ha tartalmazna kört, akkor a „hagyjuk el egy kör egy élét” eljárást a körmentességig folytatva $(n-1)$-nél kisebb élszámú feszítőfát kapnánk (ahol $n = |V(G)|$); ez a tanultak szerint lehetetlen. Mivel F' összefüggő, körmentes és $V(F') = V(G)$, ezért feszítőfa. (3 pont)
Mivel a feladat feltétele szerint $w(e) \leq w(f)$, ezért $w(F') \leq w(F)$ (ahol $w(F')$ és $w(F)$ a két feszítőfa összsúlyát jelöli). Mivel F minimális összsúlyú feszítőfa, ezért F' is az (és valójában $w(F') = w(F)$). Mivel F' már tartalmazza e-t, az állítást beláttuk. (3 pont)

5. Maximálisan hány élet lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk? (Egy él hozzávétele azt jelenti, hogy két meglévő csúcs közé húzunk be új élet, a gráfhoz további csúcsokat hozzávenni tehát nem szabad.)



* * * * *

A vizsgált G gráf valóban síkbarajzolható, ezt igazolja az alábbi ábra. (1 pont)
A szaggatottan behúzott élek mutatják, hogy lehetséges 2 élet G-hez venni úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjuk. (4 pont)



Ha G-hez 3 élet vennénk hozzá, akkor egy $n = 8$ csúcsú és $e = 19$ élű G' gráfot kapnánk. Ha G' egyszerű és síkbarajazolható volna, akkor a tanult tétel szerint $e \leq 3n - 6$, vagyis $19 \leq 18$ kellene teljesüljön, ami ellentmondás. (4 pont)
Ez tehát mutatja, hogy 3 élet már nem lehet a feltételek szerint G-hez venni, a válasz tehát 2.(1 pont)

6. A G gráf egy 101 csúcsú „csillag" – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100 fokú és száz 1 fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?

* * * * *

Ha a 100 darab (eredetileg) elsőfokú csúcsot 99 él hozzávételével egy útra „felfűzzük", akkor a kapott gráfban van Hamilton kör: a 100 pontú utat a csillag középpontjának (és két élnek) a közbeiktatásával 101 csúcsú körré (vagyis Hamilton-körré) zárhatjuk. (3 pont)

Megmutatjuk, hogy G-hez bárhogyan 98 (vagy kevesebb) élet hozzávéve a kapott gráfban még nem lesz Hamilton-kör. Így a válasz végül is 99 lesz. (1 pont)

Tegyük fel indirekten, hogy a H gráf G-ből legföljebb 98 él hozzávételével keletkezik és mégis van benne Hamilton-kör. Hagyjuk el H-ból a csillag középpontját (és a rá illeszkedő 100 élet), a kapott gráf legyen H'. (1 pont)

H'-nek tehát 100 csúcsa és legföljebb 98 éle van, így nem lehet összefüggő: valóban, ha az volna, akkor (a tanult tétel szerint) tartalmazna feszítőfát, amelynek már $100 - 1 = 99$ éle volna. (3 pont)

Eszerint a H gráfból 1 csúcsot elhagyva a kapott H' gráfnak legalább 2 komponense van, így a Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel nem teljesül H-ra. Ezért H nem tartalmazhat Hamilton-kört, ellentmondás. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zárthelyi — pontozási útmutató
2015. április 23.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy sakktáblán világos és sötét huszárok állnak, összesen hét darab. Mindegyik huszár legalább két ellenséges huszárt tud ütni. Mutassuk meg, hogy a világos huszárok mind azonos színű mezőn állnak.

* * * * *

Legyen G az a páros gráf, melynek egyik osztályában a világos, másik osztályában a sötét huszárok vannak, két különböző színű huszárt pedig akkor kötünk össze, ha ütni tudják egymást. (1 pont)
A páros gráf kisebbik osztályában (legyen ez A, a másik B) nyilván legfeljebb 3 csúcs van (1 pont)
és mivel minden huszár legalább két másik színű huszárt tud ütni, a gráfban minden fok legalább 2. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy G összefüggő. (1 pont)
Ha ugyanis G-nek legalább két komponense lenne, akkor ezek közül az egyik legfeljebb 1 csúcsot tartalmazna A-ból, (1 pont)
ekkor viszont e komponens B-beli csúcsainak foka nem lehetne legalább 2 (hiszen G egyszerű gráf – e megállapítás hiányáért nem kell pontot levonni). (1 pont)
Mivel G összefüggő, bármely két világos huszár között létezik út gráfban. (1 pont)
Mivel ez az út páros hosszú (hiszen a két huszár a páros gráf ugyanazon osztályában van), (1 pont)
az egyik huszár páros sok lépéssel el tud jutni a másik huszár helyére. (1 pont)
Mivel egy lépésben a huszár világos mezőről sötétre, sötétről pedig világosra lép, páros sok lépés után a kezdetivel azonos színen fog állni, amivel a feladat állítását beláttuk. (1 pont)

2. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás.

* * * * *

Első megoldás. Legyen $e_1 = (a, b)$ a fa egy éle, melyre a foka 1. (1 pont)
Ilyen nyilván létezik, hiszen ismert, hogy minden fában van 1 fokú csúcs. (1 pont)
Hagyjuk el a fából az a és b csúcsokat, ekkor a visszamaradó gráf egy erdő lesz, (1 pont)
melynek legalább 7 éle van, hiszen az eredeti fának 10 éle volt, (1 pont)
melyből legfeljebb 3 olyan van, amely a és b valamelyikével szomszédos. (1 pont)
Az eljárást megismételve (minden erdőnek is nyilván létezik 1 fokú csúcsa) (1 pont)
kapjuk az e_2, (1 pont)
majd az e_3 és e_4 éleket. (1 pont)
Mivel e_i nem tartalmazza $e_1, \ldots, e_{i-1}$ végpontjainak egyikét sem, (1 pont)
az e_1, e_2, e_3, e_4 élek függetlenek lesznek, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. 11 csúcsú fának 10 éle van. (1 pont)
Minden F fa páros gráf, hiszen nem tartalmaz páratlan kört (sőt, párosat sem). (3 pont)
Így Kőnig tétele szerint $\nu(F) = \tau(F)$, elég tehát $\tau(F) \geq 4$-et belátni. (3 pont)
Mivel F minden foka legfeljebb 3, a 10 él lefogásához legalább 4 csúcsra van szükség (hiszen 3 csúcs legfeljebb 9 élet foghat le), amivel az állítást beláttuk. (3 pont)

* * * * *

Harmadik megoldás. 11 csúcsú fának 10 éle van. (1 pont)
Minden F fa páros gráf, hiszen nem tartalmaz páratlan kört (sőt, párosat sem). (3 pont)
Így Kőnig tétele szerint $\chi_e(F) = \Delta(F) \leq 3$. (3 pont)
Vegyük F egy optimális élszínezését; ez legfeljebb 3 színt használ, így a színosztályok közt kell legyen legalább 4 elemű (ellenkező esetben a 3 osztály legfeljebb 9 élet tartalmazna). (2 pont)
Mivel minden színosztály párosítás, az állítást beláttuk. (1 pont)

3. Egy 100 csúcsú teljes gráfból elhagyjuk egy Hamilton-körének éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

A Hamilton-kör mentén másodszomszédos csúcsok 50-en vannak és klikket alkotnak, (2 pont)
így a kromatikus szám legalább 50. (2 pont)
Másrészt a kromatikus szám legfeljebb 50 is, hiszen a Hamilton-kör minden második élét véve teljes párosítást kapunk (1 pont)
és azon pontokat, melyek ebben a párosításban össze vannak kötve, színezhetjük ugyanazzal a színnel (hiszen ők az eredeti gráfban nem szomszédosak). (4 pont)
A kromatikus szám így pontosan 50. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.

* * * * *

Az első gráf kromatikus száma legalább 3, hiszen tartalmaz páratlan kört (egy ötszöget). (1 pont)
Háromszög viszont nincs a gráfban, így a klikkszáma legfeljebb 2. (1 pont)
(A kromatikus szám könnyen láthatóan épp 3, a klikkszám pedig 2, de ezek megállapítására nincs szükség a megoldáshoz.) Mivel intervallumgráfok esetén a kromatikus szám és a klikkszám azonos, a kérdéses gráf nem lehet intervallumgráf. (1 pont)

A második gráf sem intervallumgráf, de ezt valamivel tovább tart belátni. Jelöljük a 3 fokú csúcsot a-val, a szomszédait b, c, d-vel. Tegyük fel, hogy a gráf intervallumgráf és jelöljük az a, b, c, d-nek megfelelő intervallumokat rendre A, B, C, D-vel, legyen továbbá $A = [A_1, A_2], B = [B_1, B_2], C = [C_1, C_2], D = [D_1, D_2]$. (1 pont)
Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $B_1 \leq C_1 \leq D_1$. (1 pont)
Mivel a C intervallumnak nincs közös pontja sem B-vel, sem D-vel, $B_2 < C_1$ és $C_2 < D_1$. (2 pont)
Mivel A-nak B, C, D mindegyikével van közös pontja, az eddigiek szerint teljes egészében tartalmaznia kell C-t, (1 pont)
ekkor viszont c-nek nem lehet olyan szomszédja, amely nem szomszédja egyben a-nak is, ami ellentmondás (hiszen c-nek az a-tól különböző szomszédja épp ilyen). (2 pont)

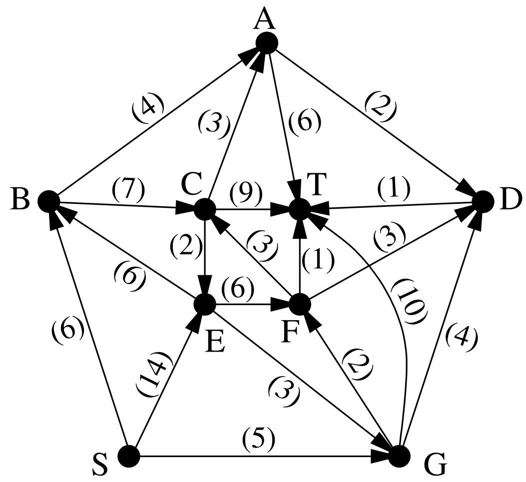
5. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrix alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $a_2, a_3, a_6, a_8, b_1, b_4, b_7, b_9$ lefogó ponthalmaz G-ben (a nem érintett sorok és oszlopok kereszteződésében ugyanis minden elem 0). (4 pont)
Az $(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_5, b_9), (a_6, b_8), (a_7, b_7), (a_8, b_6)$ élhalmaz egy 8 elemű párosítás. (3 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 8$, illetve $\nu(G) \geq 8$, ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 8$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (3 pont)
A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből is látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges (bár az esetleges hibák miatt mégis célszerű) ennek a lépéseit dokumentálni.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



* * * * *

A következő f folyam értéke 24: $f(SB) = 6, f(SE) = 13, f(SG) = 5, f(AT) = 5, f(BA) = 4, f(BC) = 7, f(CT) = 9, f(CA) = 1, f(DT) = 1, f(EB) = 5, f(EF) = 5, f(EG) = 3, f(FT) = 1, f(FC) = 3, f(FD) = 1, f(GT) = 8$ (a többi élen a folyam értéke 0). (4 pont)

Az S, B, D, E, F csúcsok által meghatározott vágás kapacitása az $SG, BA, BC, DT, EG, FT, FC$ élek összkapacitása, azaz szintén 24. (3 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 24 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 24 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például "a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 24 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2015. május 4.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Hány olyan 5 elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, amelyikben több a páros szám, mint a páratlan?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Első megoldás. Három eset lehetséges: a keresett részhalmaznak lehet 5, 4 vagy 3 páros eleme (és így a maradék 0, 1, illetve 2 eleme páratlan). (1 pont)
A 3 páros számot tartalmazó részhalmazok megszámolásához először válasszunk ki a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ halmazból 3 elemet, erre a lehetőségek száma $\binom{5}{3} =$ (1 pont)
$= \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$; (1 pont)
majd az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból válasszuk ki a hiányzó 2 páratlan elemet, itt a lehetőségek száma $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$. (1 pont)
Mivel a 3 páros szám kiválasztására vonatkozó 10 lehetőség mindegyikét 10-féleképp folytathatjuk a 2 páratlan elem kiválasztásakor, ezért a 3 páros számot tartalmazó részhalmazok száma végül is $10 \cdot 10 = 100$. (1 pont)
Hasonlóan számolhatjuk meg a 4 páros és 1 páratlan számot tartalmazó halmazokat: a lehetőségek száma $\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{1} = 5 \cdot 5 = 25$. (1 pont)
5 páros számot tartalmazó halmazból nyilván csak 1 van. (1 pont)
Így a lehetőségek száma összesen végül is 100+25+1=126. (3 pont)

Második megoldás. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz 5 elemű részhalmazainak száma $\binom{10}{5} =$ (1 pont)

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (= 252)$. (2 pont)

Ezek között a részhalmazok között pontosan ugyanannyi azoknak a száma, amelyekben több a páros szám, mint azoké, amelyekben a páratlan több. Valóban: ha minden 5 elemű részhalmazt párba állítunk (például) a komplementerével, akkor ezzel a páros számokból többet tartalmazó részhalmazok mindegyikének egy, a páratlanokból többet tartalmazót feleltettünk meg. (Ezzel tehát bijekciót adtunk meg a kétféle részhalmazok között.) (4 pont)

Így az 5 elemű részhalmazok halmazát két egyenlő részre vágtuk (hiszen a páros és páratlan elemek száma egyenlő nem lehet), ezért azon 5 elemű részhalmazok száma, amelyekben a páros szám több, a fele az összesnek: $\frac{1}{2}\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2} (= 126)$. (3 pont)

2. Létezik-e olyan 21 csúcsú G egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy G és annak a $\overline{G}$ komplementere is tartalmaz 9 darab 4 fokú és 3 darab 10 fokú pontot?

* * * * *

Tegyük fel, hogy G ilyen gráf. Ha egy v csúcs foka $\overline{G}$-ben 4, akkor v foka G-ben $20 - 4 = 16$ (mert v a tőle különböző csúcsok közül azokkal szomszédos G-ben, amelyekkel $\overline{G}$-ben nem). (1 pont)

Így G-ben minden csúcs fokát ismerjük: 9 db 4 fokú, 3 db 10 fokú és 9 db 16 fokú csúcsa van. (2 pont)

Jelölje a G 16 fokú csúcsainak halmazát A, a többi csúcsét B. Ha $v \in A$ tetszőleges, akkor a v-ből induló élek közül legföljebb 8 mehet A-beli csúcsba (hiszen G egyszerű), így legalább $16 - 8 = 8$ élnek B-beli csúcsba kell érkeznie. (2 pont)

Ez minden A-beli csúcsról elmondható, így összesen legalább $9 \cdot 8 = 72$ él megy A-ból B-be. (1 pont)

Azonban az A-beli csúcsok összfokszáma csak $9 \cdot 4 + 3 \cdot 10 = 66$, így legföljebb ennyi él érkezhet meg A-ba B-ből. (2 pont)

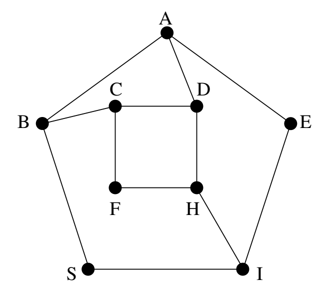
Ez az ellentmondás mutatja, hogy ilyen G gráf nem létezik. (2 pont)

3. A jobbra látható ábráról „véletlenül" lemaradt a gráf egy éle (de a csúcsok mind rajta vannak). Megállapítható-e biztosan, hogy a hiányzó él melyik két csúcsot kötötte össze, ha tudjuk, hogy az S-ből indított BFS algoritmus a gráf csúcsait az alábbi sorrendben járta be:

a) S, B, I, C, A, F, H, E, D;

b) S, I, B, E, F, H, C, A, D?

Ahol a válasz az, hogy a hiányzó él egyértelműen megállapítható, ott adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát is.



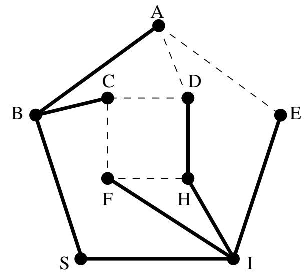
* * * * *

a) A hiányzó él lehetett akár a $\{B, F\}$, akár az $\{I, F\}$. Valóban: az első esetben az S szomszédainak, vagyis B-nek és I-nek a bejárása után az algoritmus a B szomszédait sorolja, ezek közül C és A után épp az utolsóként F-et; a másik esetben a B szomszédai után az I szomszédainak felsorolását kezdi az eljárás F-fel. Így nem állapítható meg biztosan a hiányzó él. (3 pont)

b) A sorozat negyedik helyén álló E elérhető lehetne közvetlenül az S-ből is, ha a hiányzó él $\{S, E\}$ volna; ekkor azonban az E után nem következhetne F, mert az sem S-nek, sem I-nek nem lehetne már szomszédja. Így S-nek csak az ábrán is látható két szomszédja van. (2 pont)

Ezek felsorolása után tehát I (további) szomszédainak kell következni. Mivel a sorozatban E, F, H következik, világos, hogy az $\{I, F\}$ él hiányzik a gráfból, más lehetőség most nincs. (2 pont)

Az ehhez a bejáráshoz tartozó BFS-fa tehát a következő:



(3 pont)

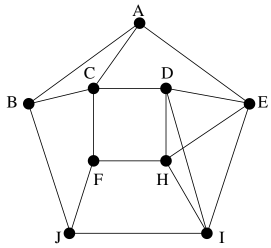
4. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Első megoldás. Állítsuk w értéke szerinti növekvő sorrendbe G éleit úgy, hogy ha G-nek van e-n kívül más $w(e)$ súlyú éle is, akkor a $w(e)$ súlyúak közül e legyen utolsóként felsorolva. (2 pont)
A minimális összsúlyú feszítőfa megkeresésére szolgáló Kruskal-algoritmust lefuttathatjuk az éleknek ebből a sorrendjéből kiindulva is (hiszen az algoritmus csak a w szerinti növekvő sorrendet írja elő, az azonos súlyú élek sorrendje közömbös). (1 pont)
Mivel a Kruskal-algoritmus (a tanult tétel szerint) minimális összsúlyú feszítőfát ad, megoldjuk a feladatot, ha megmutatjuk, hogy a kapott F feszítőfa nem tartalmazza e-t. (1 pont)
Jelölje az e előtt az eljárás által kiválasztott élek (és G összes csúcsa) által alkotott gráfot F_0. A Kruskal-algoritmus csak akkor dönt úgy, hogy e-t beveszi F élei közé, ha e az F_0-nak két különböző komponense között halad (mert csak így fordulhat elő, hogy $F_0 \cup \{e\}$ nem tartalmaz kört). (1 pont)
Tegyük fel tehát, hogy e az F_0 két különböző komponense között fut. Induljunk el a C körön az e egyik végpontjától a másikig (az e-t nem használva). Eközben kell találnunk olyan f élt, ami szintén F_0 különböző komponensei között fut (különben C mentén haladva végig ugyanabban a komponensben maradnánk). (2 pont)
Mivel f-et az eljárás korábban vizsgálta e-nél (ha $w(f) < w(e)$, akkor az algoritmus működési szabálya szerint, ha pedig $w(f) = w(e)$, akkor a sorrendre vonatkozó választásunk miatt), ezért f-nél rosszul döntött: ha f-et még F_0-hoz hozzávéve sem keletkezik kör, akkor az f-nél korábban vizsgált élekhez hozzávéve sem keletkezhetett. (2 pont)
Ez az ellentmondás mutatja, hogy a Kruskal-algoritmus által megadott F feszítőfa valóban nem tartalmazza e-t. (1 pont)

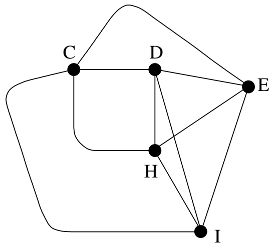
Második megoldás. Legyen F egy tetszőleges, minimális összsúlyú feszítőfa (a w élsúlyozás szerint). Ha F nem tartalmazza e-t, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel ezért, hogy tartalmazza. (1 pont)
Ha F-ből elhagyjuk e-t, akkor a kapott F_0 gráfnak két komponense lesz. Induljunk el a C körön az e egyik végpontjától a másikig (az e-t nem használva). Eközben kell találnunk olyan f élt, ami szintén F_0 két komponense között fut (különben C mentén haladva végig ugyanabban a komponensben maradnánk). (2 pont)
Hagyjuk ki F-ből e-t és vegyük be helyette f-et; a kapott részgráfot jelölje F'. Állítjuk, hogy F' is egy feszítőfa. (2 pont)
Mivel f az F_0 gráf két komponensét köti össze, ezért F' valóban összefüggő. (1 pont)
Továbbá mivel $|E(F')| = |E(F)| = n - 1$ (ahol $n = |V(G)|$), ezért F' körmentes is: ha nem így volna, akkor a tanult „hagyjuk el egy kör egy élét” eljárás $(n-1)$-nél kisebb élszámú feszítőfát adna; ez a tanultak szerint lehetetlen. Mivel F' összefüggő, körmentes és $V(F') = V(G)$, ezért feszítőfa. (2 pont)
Mivel a feladat feltétele szerint $w(f) \leq w(e)$, ezért $w(F') \leq w(F)$ (ahol $w(F')$ és $w(F)$ a két feszítőfa összsúlyát jelöli). Mivel F minimális összsúlyú feszítőfa, ezért F' is az (és valójában $w(F') = w(F)$). Mivel F' már nem tartalmazza e-t, az állítást beláttuk. (2 pont)

5. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



* * * * *

Hagyjuk el a gráfból az $\{A, B\}$ és a $\{J, F\}$ éleket. (2 pont)
A keletkező gráfban A, B, F és J foka 2 lesz, ezeket „olvasszuk össze” egyetlen éllé: (2 pont)



A kapott gráf a K_5 (az 5 csúcsú teljes gráf), mert bármely két csúcsa szomszédos. (2 pont)
Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot is tartalmaz (például a $\{B, C\}$, $\{C, F\}$, $\{D, E\}$ és $\{H, I\}$ élek elhagyásával, majd a kapott másodfokú pontok összeolvasztásával kaphatunk ilyet), így a feladatnak más jó megoldása is van.

6. A 30 csúcsú G összefüggő, egyszerű gráf csúcsai közül 10-et pirosra, 10-et kékre, 10-et zöldre színeztünk. Tudjuk, hogy minden csúcs legalább 5, vele azonos színű csúccsal szomszédos és minden csúcs legföljebb 1, tőle különböző színű csúccsal szomszédos. Mutassuk meg, hogy G-ben van legalább 25 élből álló út.

* * * * *

Jelölje a piros, a kék, illetve a zöld csúcsok által feszített részgráfokat P, K, illetve Z. Mindhárom gráf 10 csúcsú, egyszerű és a feladat feltétele miatt bennük minden pont foka legalább 5, így a Dirac-tétel miatt tartalmaznak egy-egy Hamilton-kört. (2 pont)
G összefüggő, így P, K és Z közül legalább az egyiket mindkét másikkal összeköti egy-egy él (különben P, K vagy Z külön komponenst alkotna). A színek szerepe felcserélhető, ezért feltehetjük, hogy például P ilyen, így az e él egy piros és egy kék, az f él egy piros és egy zöld csúcsot köt össze. (2 pont)
A három Hamilton-kör, illetve e és f felhasználásával készítjük el a keresett utat. Ehhez a K-beli, illetve Z-beli Hamilton-körökből hagyjuk el az e-nek, illetve az f-nek a K, illetve Z-beli végpontjára illeszkedő egyik élét. Így két utat kapunk, amelyek K, illetve Z minden csúcsát tartalmazzák. (1 pont)
Az e és f élek P-beli végpontja legyen u és v. Ekkor $u \neq v$, különben v-nek két, tőle különböző színű szomszédja volna. Ezért a P-beli Hamilton-kör két, u és v közötti „íve” két különböző utat ad u és v között; válasszuk ki ezek közül a hosszabbat (vagy legalábbis a másiknál nem rövidebbet). (2 pont)
Az eddig megtalált 3 útból, illetve e-ből és f-ből összeálló út minden kék és zöld csúcsot tartalmaz és a pirosakból is legföljebb csak 4-et hagy ki (mert az e és f élek P-beli végpontjain kívül 8 piros csúcs van, de a választott ív ezek közül legalább 4-et tartalmaz). (2 pont)
Mivel a kapott út legalább 26 csúcsú, így valóban legalább 25 éle van. (1 pont)

A feladat eredeti kitűzése sajnos hibás volt, hiányzott a „minden csúcs legföljebb 1, tőle különböző színű csúccsal szomszédos” feltétel. Emiatt egy megoldót sem érhet hátrány: maximális pontot ér az is, ha valaki ellenpéldát mutat a hiányosan kitűzött állításra, valamint az is, ha valaki a fenti megoldást írja le, de kihagyja belőle a hiányzó feltétel szerepét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
2. pótzárthelyi — pontozási útmutató
2015. május 4.

Általános alapelvek.

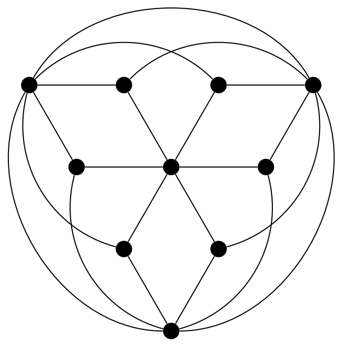
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az alább látható gráf kromatikus számát.



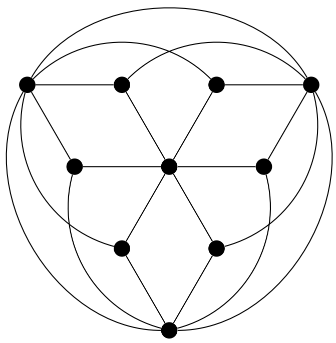
* * * * *

A középső, 6 fokú csúcsot 1-esre, a szomszédait (akik közül semelyik kettő nincs összekötve) 2-esre, a három maradék csúcsot (melyek egyike sincs összekötve a középsővel) 1-esre, 3-asra, illetve 4-esre színezve jó színezést kapunk, (4 pont)
tehát a kromatikus szám legfeljebb 4. (1 pont)
A sarkokban lévő 3 csúcs mindegyikére igaz, hogy három másik csúcs van, amellyel nem szomszédosak, (1 pont)
ezek viszont nem alkotnak független halmazt, (1 pont)
így azon színosztály, melyben egy sarokban lévő csúcs van, legfeljebb három csúcsot tartalmazhat. (1 pont)
Mivel ezek a színosztályok a három sarokban lévő csúcs esetén különbözők kell legyenek (hiszen e három csúcs háromszöget alkot), szükség van legalább négy színosztályra, (1 pont)

így a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)

Létezik más jó 4-színezés is, és természetesen másképp is belátható, hogy 3 szín nem elég. Ez utóbbi történhet tipikusan úgy, hogy kiválasztunk egy háromszöget, amit muszáj 3 különböző színnel színezni, majd megmutatjuk, hogy ez a színezés az adott 3 színnel nem terjeszthető ki az egész gráfra. Aki ezt precízen, indokolva teszi, az természetesen 5 pontot kapjon erre a részre. Aki kissé hiányos indoklással, de láthatóan ezen az elven dolgozik, az 2-4 pontot, míg az, aki csak egy konkrét próbálkozásról (pl. a mohó színezésről) látja be, hogy nem lesz jó, 0-1 pontot kapjon.

2. Határozzuk meg az alább látható gráfban a független élek maximális számát.



* * * * *

Számozzuk a csúcsokat a fölső sorban balról jobbra 1-től 4-ig, az alattuk levő sorban 5-től 7-ig, s.í.t.. Ekkor 1-2, 3-4, 5-6, 8-10 egy négy élű párosítás, (3 pont)
így a keresett maximum legalább 4. (1 pont)
Az 1,4,6,10 csúcsok (vagyis a négy darab 6 fokú csúcs) lefogó halmazt alkot. (4 pont)
Mivel minden párosítás legfeljebb akkora lehet, mint bármely lefogó ponthalmaz, (1 pont)
a látott 4 élű párosítás maximális kell, hogy legyen. (1 pont)

3. Legyen G olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyre G-ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.

* * * * *

Mivel G-ben van Hamilton-kör és az páratlan hosszú, (2 pont)
így G nem páros gráf, vagyis a kromatikus száma legalább 3. (2 pont)
A G komplementerében lévő Hamilton körön az 1. és a 2. csúcs színezhető ugyanazzal a színnel, (1 pont)
hiszen G-ben nem szomszédosak. (1 pont)
Ugyanígy színezhetők azonos színnel a 3. és a 4., illetve az 5. és a 6. csúcsok. (2 pont)
A 7. csúcsot egy negyedik színnel színezve most a gráf egy jó 4-színezését kapjuk, (1 pont)
ahonnan a kromatikus szám legfeljebb 4. (1 pont)

4. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

* * * * *

Első megoldás. Először megmutatjuk, hogy a páros gráf két osztálya ugyanakkora kell legyen. Ha ez nem így lenne, akkor a kisebbik osztályban legfeljebb 4 csúcs lenne, (1 pont)

így legfeljebb $4 \cdot 4 = 16$ él mehetne ki belőle, (1 pont)
míg a nagyobbik osztályban legalább 6 pont lenne és így ebből legalább $6 \cdot 3 = 18$ él menne ki, (1 pont)
ami nyilván lehetetlen. (1 pont)
Most a Hall-feltétel teljesülését vizsgáljuk meg. Legyen X az egyik osztály tetszőleges részhalmaza. Ha X legfeljebb 3 elemű, akkor $|N(X)| \geq |X|$ nyilvánvalóan igaz. (1 pont)
Ha X legalább 4 elemű, akkor $N(X)$ 5 elemű lesz (sőt, ehhez elég az is, ha X 3 elemű), (2 pont)
mivel ellenkező esetben az $N(X)$-ben nem szereplő csúcsnak nem lehetne legalább 3 szomszédja. (2 pont)
Így a gráfban teljesül a Hall-feltétel, amiből az állítás (a Hall- vagy a Frobenius-tétel szerint) már következik. (1 pont)

Második megoldás. Az élszínezésre vonatkozó Kőnig-tétel szerint a gráf élkromatikus száma legfeljebb 4, (1 pont)
így ha van legalább 17 éle, (1 pont)
akkor a skatulya-elv szerint tetszőleges 4 színnel való élszínezésében kell legyen olyan színosztály, amely 5 élből áll, azaz teljes párosítás. (2 pont)
Ha a gráfnak legfeljebb 16 éle van, akkor legfeljebb két 4 fokú csúcsa lehet, (1 pont)
így legfeljebb két él elhagyásával elérhető, hogy minden fok legfeljebb 3 legyen a gráfban. (2 pont)
A visszamaradó gráf élkromatikus száma tehát a Kőnig-tétel szerint legfeljebb 3. (1 pont)
A visszamaradó gráfnak még mindig legalább 13 éle lesz (hiszen az eredeti gráfnak legalább 15 volt), (1 pont)
így megint csak a skatulyaelv alapján a visszamaradó gráfnak (és így persze az eredeti gráfnak is) lesz 5 élű, azaz teljes párosítása. (1 pont)

5. Mutassuk meg, hogy ha G 9 csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$.

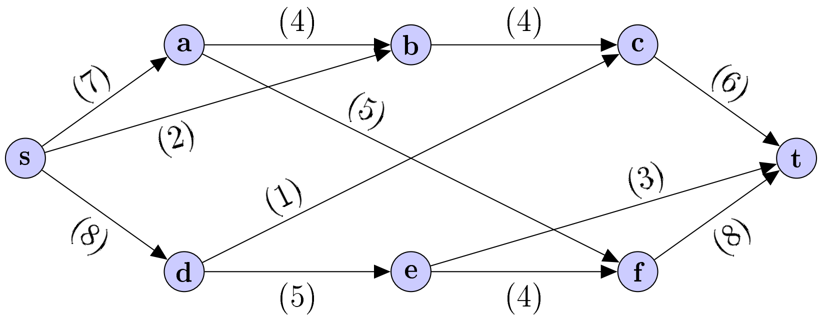
* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a G-beli maximális fokszámot d-vel. Ekkor G komplementerében van $8 - d$ fokú csúcs, (1 pont)
így a komplementerben a maximális fokszám legalább $8 - d$. (1 pont)
Ahhoz, hogy ennél ne legyen nagyobb a maximális fokszám $\overline{G}$-ben, nyilván az kell, hogy minden csúcs foka épp $8 - d$ legyen (hiszen ennél kisebb fok nem lehet $\overline{G}$-ben, mert ekkor nem d lenne a maximális fok G-ben). (2 pont)
Ha tehát van két különböző fok $\overline{G}$-ben (ami ekvivalens azzal, hogy van két különböző fok G-ben), akkor a maximális fok $\overline{G}$-ben legalább $9 - d$. (1 pont)
Mivel bármely gráf élkromatikus száma legalább akkora, mint a gráfbeli maximális fokszám, ebből a feladat állítása azonnal következik. (1 pont)
Ha viszont G-ben minden fok ugyanannyi, akkor d színnel G nem élszínezhető, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis bármely színosztály teljes párosítást alkotna, 9 csúcsú gráfban pedig ilyen nincs. (2 pont)
Így $\chi_e(G) \geq d + 1$, ahonnan a feladat állítása ismét következik. (1 pont)

Második megoldás. A K_9 teljes gráf éleit meg lehet színezni $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G})$ színnel. (2 pont)
Valóban, először a G-beli éleket $\chi_e(G)$ színnel, majd a nem G-beli (azaz $\overline{G}$-beli) éleket $\chi_e(\overline{G})$ színnel színezve K_9 jó élszínezését kapjuk $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G})$ színnel. (4 pont)
K_9-ben minden fok 8, de 8 szín nem elég az élszínezéséhez, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis bármely színosztály teljes párosítást alkotna, 9 csúcsú gráfban pedig

ilyen nincs. (2 pont)
Így $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$. (1 pont)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



* * * * *

A következő f folyam értéke 15: $f(sa) = 7, f(sd) = 6, f(sb) = 2, f(ab) = 2, f(af) = 5, f(bc) = 4, f(ct) = 5, f(dc) = 1, f(de) = 5, f(et) = 2, f(ef) = 3, f(ft) = 8$ (a többi élen a folyam értéke 0). (4 pont)
Az s, d csúcsok által meghatározott vágás kapacitása az sa, sb, dc, de élek összkapacitása, azaz szintén 15. (3 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 15 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 15 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például "a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 15 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.