Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
pontozási útmutató
2024. május 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Hány 3 fokú csúcsa lehet egy olyan húsz csúcsú fának, aminek pontosan tíz 1 fokú és pontosan egy 10 fokú csúcsa van?

* * * * *

20 csúcsú fának a tanultak szerint 19 éle van, (1 pont)
így a fokszámainak összege 38. (1 pont)
Jelöljük a 10-től és 1-től eltérő fokú csúcsok halmazát U-val. U 9 csúcsot tartalmaz, (1 pont)
melyek fokszámösszege $38 - 10 \cdot 1 - 1 \cdot 10 = 18$. (1 pont)
Mivel a fák definíció szerint összefüggők, legalább 2 csúcsú fában nem lehet izolált pont, vagyis 0 fokú csúcs (1 pont)
(a „legalább 2 csúcsú” hiányáért ne vonjunk le pontot),
ezért minden csúcs foka legalább 1. (1 pont)
Az U-beli csúcsok foka így legalább 2 kell legyen, hiszen sem 1, sem 0 nem jön szóba (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (2 pont)
Így U egyetlen csúcsának foka sem lehet 3, ellenkező esetben az U-beli csúcsok összfokszáma meghaladná a 18-at. (2 pont)

A fában tehát nem lehet 3 fokú csúcs. (0 pont)

Aki egyáltalán nem foglalkozik az esetleges 0 fokú csúcsokkal (mintha nem is létezhetnének ilyenek egyetlen gráfban sem), az ezért 2 pontot veszítsen. Aki megemlíti és használja, de nem bizonyítja, hogy minden fok legalább 1, az pedig ezért 1 pontot veszítsen.

2. Legyenek egy gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, két különböző csúcs pedig legyen pontosan akkor szomszédos, ha közülük a nagyobbik legalább kétszer akkora, mint a kisebbik. Döntsük el, hogy van-e a gráfnak Hamilton-köre.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Ha töröljük a gráfból az 50-nél kisebb számokhoz tartozó csúcsokat, (2 pont)
akkor olyan gráfot kapunk, melynek 1 darab 2 csúcsú és 49 darab 1 csúcsú komponense van. (2 pont)
Csakugyan: a visszamaradó gráf csúcsai az 50 és 100 közti egészek, amik közt egyetlen él megy, éspedig az 50 és a 100 közt. (2 pont)
Ez azért teljesül, mert bármely másik pár esetében vagy a kisebbik szám lesz legalább 51, vagy a nagyobbik legfeljebb 99, így a nagyobbik és a kisebbik hányadosa nem éri el a 2-t. (2 pont)
Mivel 49 pont törlése után a gráf 50 komponensre esett szét, a tanult állítás miatt nincs benne Hamilton-kör. (2 pont)

Hamilton-út és (rossz) Hamilton-kör bemutatásáért nem jár pont, mint ahogy azért sem, ha valaki azt mutatja meg, hogy egy konkrét Hamilton-út nem zárható Hamilton-körré.

3. A G egyszerű gráfnak 20 csúcsa és 101 éle van. Lehetséges-e, hogy G kromatikus száma
a) 2;
b) 3?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) G kromatikus száma nem lehet 2. (0 pont)
Ugyanis ha a kromatikus szám 2 lenne, G csúcsait két osztályba lehetne sorolni úgy, hogy él csak az osztályok közt menjen (ezt persze meg lehet másképp is fogalmazni: G páros gráf lenne). (2 pont)
Ha mindkét osztályban 10 csúcs van, akkor az élek száma legfeljebb $10 \cdot 10 = 100$ lehet, mert a gráf egyszerű (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot), (1 pont)
ha pedig a két osztály mérete különböző, akkor a méretek különbsége legalább 2; ekkor a nagyobbikból a kisebbikbe egy pontot áttéve az elérhető élek száma nőne, így ilyenkor 100-nál kevesebb élünk lehetne csak. (2 pont)
Persze másképp is lehet az utóbbi állítás mellett érvelni, pl. a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel vagy az esetek felsorolásával. Hiányos, de érdemi bizonyítási kísérletért (pl. „Akkor lesz a legtöbb él, ha a két osztályban a csúcsok egyenletesen vannak elosztva.") 1 pontot adjunk, aki csak kijelenti, hogy nem lehet 100-nál több él, annak az utóbbi 2 pont természetesen nem jár.
b) A kromatikus szám lehet 3. (0 pont)
Legyen H az a páros gráf, melyben mindkét osztály 10 csúcsú és bármely két különböző osztálybeli csúcsot összekötünk egy-egy éllel. Legyen most G az a gráf, melyet H-ból úgy kapunk, hogy két azonos osztályba tartozó csúcsot összekötünk. (1 pont)
A kapott gráfnak 101 éle lesz, megmutatjuk, hogy a kromatikus száma 3. (0 pont)
Az a) rész miatt a kromatikus szám legalább 3 (de persze máshogy is lehet érvelni, pl. mutathatunk háromszöget a gráfban). (2 pont)
3 színnel pedig könnyű G-t megszínezni: színezzük H egyik osztályának csúcsait az 1, másik

osztályának csúcsait a 2 színnel, majd az extra él egyik végpontját színezzük át 3-asra, ekkor csakugyan nem megy él azonos színű csúcsok közt. (2 pont)

Aki rossz példát ad meg, vagyis olyat amelyre valamelyik tulajdonság (csúcsszám, élszám, kromatikus szám, egyszerűség) nem teljesül, az a rossz példa tulajdonságainak bizonyítására persze nem kaphat pontot.

4. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix i. sorának j. eleme 1 (ahol $1 \le i \le 9$ és $1 \le j \le 8$). Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt a gráfban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$a_1, a_3, a_4, b_1, b_4, b_7, b_8$ egy 7 elemű lefogó ponthalmaz a páros gráfban, (2 pont)
mert a mátrixban szereplő összes 1-es az érintett sorok vagy oszlopok valamelyikében található (vagyis minden élnek legalább az egyik végpontja a felsoroltak között van). (1 pont)
Az $(a_1, b_5), (a_2, b_4), (a_3, b_2), (a_4, b_3), (a_5, b_7), (a_6, b_8), (a_8, b_1)$ élhalmaz egy 7 elemű párosítás, hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \le 7$, illetve $\nu(G) \ge 7$, (2+2 pont)
ahonnan a $\nu(G) \le \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 7$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (2 pont)

A $\nu(G) \le \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni, (páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$). A $\nu(G) = 7$ és $\tau(G) = 7$ állítások indoklásáért adható pontok viszont csak annak járnak, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális, illetve a megadott lefogó ponthalmaz minimális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt" nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. A párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását viszont alapozhatjuk az algoritmusra is: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben X az A-beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető B-beliekből és az alternáló úton el nem érhető A-beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

5. Egy tizenhat csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 3, a független élek maximális száma pedig 7. Határozzuk meg a gráf élkromatikus számát.

* * * * *

Mivel a gráf egyszerű, használhatjuk Vizing tételét: $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$, így az élkromatikus szám legfeljebb 4. (2 pont)

Aki nem említi az egyszerűséget, az ezért 1 pontot veszítsen.

Bármely élszínezésben az azonos színű élek párosítást alkotnak, (1 pont)

így a feladat szövege szerint legfeljebb 7 élből állhatnak. (2 pont)

3 színnel tehát legfeljebb 21 élet tudunk jól kiszínezni, (2 pont)

a gráfnak viszont $\frac{16 \cdot 3}{2} = 24$ éle van. (1 pont)

Így legalább 4 színre van szükség a gráf élszínezéséhez, (1 pont)

a keresett élkromatikus szám tehát 4. (1 pont)

A $\chi_e(G) \geq 3$ állításért nem jár pont. Aki viszont a 4 színnel színezhetőség megállapítása után erőfeszítéseket tesz annak belátására, hogy 4 szín kell is, az kaphat 1 pontot akkor is, ha ezek az erőfeszítések nem járnak sikerrel.

6*. Egy 102 csúcsú G egyszerű gráfnak minden komponense 3 vagy 4 csúcsú. A gráfot egy lépésben átalakíthatjuk úgy, hogy először elhagyunk 3 tetszőleges élet, majd hozzáveszünk 1 tetszőleges élet (miközben a csúcshalmaz nem változik). Mutassuk meg, hogy akárhányszor is hajtjuk végre ezt a lépést G-ből kiindulva, soha nem kapunk összefüggő gráfot.

* * * * *

Állapítsuk meg először, hogy legfeljebb hány éle lehet a gráfnak. Mivel 3 csúcsú komponensben legfeljebb 3 él lehet, ami a komponens csúcsszámával azonos, 4 csúcsú komponensben pedig legfeljebb 6 él, ami 2-vel több, mint a komponens csúcsszáma, a lehető legtöbb élet akkor kapjuk, ha a lehető legtöbb 4 csúcsú komponensünk van. A 4 csúcsú komponensek száma ekkor 24, a 3 csúcsú komponensek száma 2, az éleké pedig $24 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 150$. (Itt kihasználtuk, hogy a gráf egyszerű, de e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot.) (2 pont)

A komponensek száma nyilván ugyanekkor lesz minimális, vagyis ha a lehető legtöbb a 4 csúcsú komponens, ilyenkor – mint láttuk – 26 komponensünk lesz. (1 pont)

A gráf összefüggővé tételéhez legalább 25 élet kellene tehát bevennünk, (1 pont)

mert egy él bevétele legfeljebb eggyel csökkenti a komponensek számát (az elhagyás pedig nyilván nem tud csökkenteni). (1 pont)

Legalább 25 lépésre lenne tehát szükség, aminek a során háromszor annyi élet hagyunk el, mint amennyit beveszünk, így az élek száma legalább 50-nel csökkenne. (3 pont)

Mivel a gráfnak legfeljebb 150 éle volt eredetileg, ekkor legfeljebb 100 éle lehetne, így azonban nem lehet összefüggő, hiszen a tanultak szerint 102 csúcsú összefüggő gráfnak legalább 101 éle kell legyen. (2 pont)

Bár nem volt róla szó, hogy egy lépés végrehajtása közben is vizsgálni kellene az összefüggőséget, érdemes megállapítani, hogy mivel először hagyunk el éleket és aztán veszünk be egyet, a 25. lépés végrehajtása közben sem lehet a gráf összefüggő.