Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
pontozási útmutató
2021. április 30.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldás főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Birnenkopf úr új jelszót szeretne készíteni magának, mert a régit (`herrbirnenkopf`) ellopták. A jelszóval kapcsolatban a következő elvárásai vannak:

a) csak betűkből álljon (a számokat nem szereti), az angol abc 26 betűje jöhet szóba,

b) egyetlen betű sem jelenhet meg egynél többször,

c) pontosan 12 betű kell szerepeljen, mégpedig 7 kisbetű és 5 nagybetű, de ugyanaz a betű csak az egyik alakjában szerepelhet.

Hány jelszóból választhat Birnenkopf úr? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Első megoldás. Hozzuk létre először a jelszónak azt a verzióját, ahol a kis- és nagybetűk még nem játszanak szerepet. (1 pont)
Mivel minden betű csak egyszer szerepelhet, ezt a tanultak szerint $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 15$-féleképp

tehetjük meg. (3 pont)
Válasszuk ki most, hogy hova kerül kis-, illetve nagybetű: (1 pont)
a 12 helyből 5-re kerül nagybetű, a választási lehetőségek száma tehát $\binom{12}{5}$ (hiszen a nagybetűk helyének kiválasztásával a kisbetűk helyzete is adottá válik). (3 pont)
Mivel a jelszó minden kezdeti verzióját ennyiféleképp tudjuk végleges jelszóvá alakítani, (1 pont)
a keresett szám $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot \binom{12}{5} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$. (1 pont)

Második (nem túl különböző) megoldás. Válasszuk ki először, hogy melyik kisbetűk és milyen sorrendben szerepeljenek a jelszóban. Ezt a tanultak szerint $26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 20$-féleképp tehetjük meg. (1 pont)
Jöjjenek most a nagybetűk. Itt a kiválasztott kisbetűk nagy változatai nem használhatók, (1 pont)
így ezeket $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \ \cdot 15$-féleképp választhatjuk ki. (1 pont)
A választási lehetőségek száma e két szám szorzata lesz, hiszen bármely kisbetűsorozathoz bármely nagybetűsorozatot választhatjuk. (1 pont)
Már csak azt kell eldöntenünk, hogy hova kerüljön kis-, illetve nagybetű, innen a megoldás azonos az előzővel.

Harmadik megoldás. Válasszuk ki először, hogy melyik kis-, illetve nagybetűk szerepeljenek a jelszóban. Ezt $\binom{26}{7}$, illetve $\binom{19}{5}$ módon tudjuk megtenni, (2 pont)
hiszen a betűk különbözők és a már kiválasztott kisbetűk nagy megfelelőit nem választhatjuk. (2 pont)
Az eddigi választási lehetőségek száma e két szám szorzata lesz, hiszen bármely kisbetűhalmazhoz bármely nagybetűhalmazt választhatjuk. (1 pont)
Már csak annyi dolgunk van, hogy a kapott betűket sorbarakjuk, (1 pont)
ez a tanultak szerint 12!-féleképp lehetséges. (1 pont)
A jelszavak száma tehát $\binom{26}{7} \cdot \binom{19}{5} \cdot 12!$, hiszen a korábbi választási lehetőségek mindegyikét 12! módon tudjuk sorbarendezni. (1 pont)
Ezt a négy alapművelettel felírva: $\frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$. (2 pont)

Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért. Ha azonban valaki nem számolja ki a binomiális együtthatók értékeit, a vonatkozó pontokat ne kapja meg.

2. Egy szabályos 11-szögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11 csúcsú, 22 élű) gráf kromatikus számát.

* * * * *

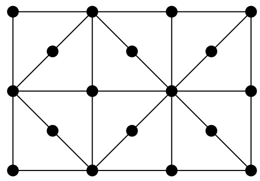
A gráfot könnyű 4 színnel megszínezni, jó színezésért adjunk 3 pontot.

Megmutatjuk, hogy 3 szín nem elég. Sorszámozzuk a 11-szög csúcsait tetszőleges csúcsnál kezdve az óramutató járása szerint. Tegyük fel indirekten, hogy létezik a gráfnak jó 3-színezése. (1 pont)
Ekkor az első három csúcs három különböző színt kapna, (mondjuk az első az 1-et, a második a 2-t, a harmadik a 3-at). (1 pont)
Ekkor a negyedik csúcs ismét 1-es színű kéne legyen, (1 pont)
hiszen van 2-es és 3-as színű szomszédja is. (1 pont)
Az ötödik csúcs így 2-es színű kéne legyen, hiszen van 1-es és 3-as színű szomszédja is. A gondolatmenetet folytatva az derül ki, hogy a tizedik csúcs 1-es színű kell legyen, (1 pont)
ez azonban nem lehetséges, hiszen szomszédja az első csúcs (is). (1 pont)

A kromatikus szám így 4, mivel a látottak szerint legalább és legfeljebb is 4. (1 pont)

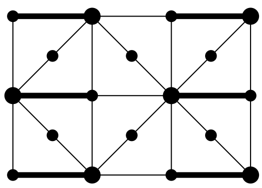
Ügyeljünk rá, hogy a fentihez látszólag nagyon hasonló megoldások lehetnek teljesen rosszak is, pl. ha a megoldó azért színez így, mert a mohó algoritmust követi (akár kimondva, akár kimondatlanul). Ez pl. abból látszik jól, hogy nem abból indul ki (indirekten), hogy csak 3 színt lehet használni.

3. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



* * * * *

Az alábbi ábrán a vastagított élek 6 élű párosítást, (2 pont)
a nagyobb méretű csúcsok pedig 6 elemű lefogó ponthalmazt alkotnak. (3 pont)
Megmutatjuk, hogy a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. Az előadásról tudjuk, hogy bármely G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$ teljesül. (1 pont)
A 6 élű párosítás igazolja, hogy $\nu(G) \geq 6$, (1 pont)
a 6 csúcsú lefogó ponthalmaz pedig igazolja, hogy $\tau(G) \leq 6$. (1 pont)
Így $6 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 6$, ami csak úgy teljesülhet, ha mindenütt egyenlőség áll. (1 pont)
$\nu(G) = 6$ igazolja a párosításunk maximalitását, $\tau(G) = 6$ pedig a lefogó ponthalmazunk minimalitását. (1 pont)



4. Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot *teljes páros gráfnak* nevezünk, ha A minden csúcsa össze van kötve B minden csúcsával (egy éllel). Hány különböző 101 csúcsú teljes páros gráf létezik, melynek van Euler-sétája? (Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak.)

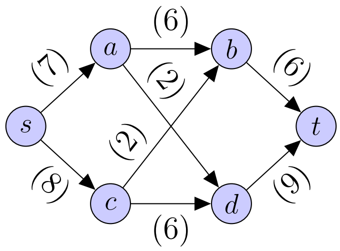
* * * * *

Jelöljük $K_{a,b}$-vel azt a teljes páros gráfot, melynek kisebbik (nem nagyobbik) osztályában a, a másik osztályában b csúcs szerepel. Megmutatjuk, hogy a 101 csúcsú teljes páros gráfok közül $K_{0,101}$ és $K_{2,99}$ rendelkezik Euler-sétával, a többiek pedig nem. (Ne vonjunk le pontot a $K_{0,101}$ hiányáért.) (1 pont)
$K_{0,101}$-nek nincs éle, így az üres élhalmaz Euler-sétája lesz. (0 pont)
Minden más $K_{a,b}$ összefüggő, hiszen bármely két (x és y) csúcs közt van út. (1 pont)
Valóban, ha $x \in A$ és $y \in B$, akkor él fut x és y között, ha pedig $x, y \in A$ vagy $x, y \in B$, akkor van közös szomszédjuk. (2 pont)
Ilyenkor tehát a tanult tétel szerint elég a fokszámok paritását vizsgálni. Az a és b számok közül pontosan egy páratlan, hiszen az összegük páratlan. (2 pont)
Ha a páratlan, akkor $K_{a,b}$-ben b darab páratlan fokú csúcs lesz, ha pedig b páratlan, akkor a darab. (1 pont)
Euler tétele szerint egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van Euler-séta, ha a páratlan

fokú csúcsok száma legfeljebb 2. (1 pont)
Ez esetünkben pontosan $a = 2$ mellett teljesül, hiszen ha a ennél nagyobb páros szám lenne, akkor kettőnél több páratlan fokú csúcs lenne A-ban, (1 pont)
míg ha a 2-nél nagyobb páratlan szám lenne, akkor B-ben lenne kettőnél több páratlan fokú csúcs. (1 pont)

A 0 pontos megállapításért adhatunk 1 pontot olyan megoldóknak, akik ezzel nem lépik túl a 10 pontot.

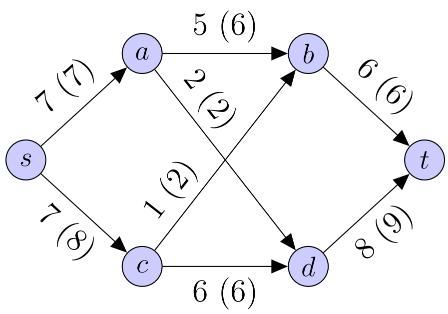
5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot s-ből t-be és egy minimális $s - t$ vágást.



* * * * *

Az alábbi ábrán egy 14 értékű folyam látható. (2 pont)
Szigorúan véve indokolni kéne, hogy az ábrán csakugyan folyam látható (vagyis kéne írni arról, hogy miért teljesülnek a folyamhoz szükséges feltételek), sőt azt is, hogy 14 az értéke, de ezek hiányáért ne vonjunk le pontot. Ha a dolgozatban folyamként megadott ábra nem folyamot ábrázol, akkor el kell dönteni, hogy elírásról vagy elvi hibáról van-e szó. Ha meggyőző bizonyíték van rá, hogy elírás történt, akkor kevés (pl. 1) pontot vonjunk le, ellenkező esetben viszont egyáltalán nem jár pont erre a részre.
Az $\{s, a, b, c\}$ vágás kapacitása 14, (2 pont)
mivel a vágásból kimutató éleknek ennyi az összkapacitása. (1 pont)
Az előadáson tanultak szerint egyetlen vágás kapacitása sem lehet kisebb, mint egy tetszőleges folyam értéke, (3 pont)
így bármely vágás kapacitása legalább 14 kell legyen, tehát $\{s, a, b, c\}$ minimális vágás (1 pont)
és bármely folyam értéke legfeljebb 14, tehát az ábrán megadott folyam maximális. (1 pont)

Az utolsó 5 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. Ez persze történhet máshogy is, mint a fenti megoldásban (pl. a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy az tudottan maximális folyamot talál, illetzve annak a leírásával, hogy az utolsó segédgráfban mely pontok érhetők el s-ből), de üres frázisok, mint pl. „a Ford-Fulkerson tétel miatt” nem érnek pontot. Aki a javítóutas algoritmust futtatja, annak természetesen nem kell belátnia, hogy folyamot kapott és azt sem, hogy annak értéke 14, hiszen ezek következnek az előadáson tanultakból.



6*. Egy 100×100-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le.

* * * * *

Legyenek egy G gráf csúcsai a kijelölt mezők, két csúcsot kössünk össze, ha a mezők él mentén szomszédosak. A feltétel szerint ekkor G összefüggő, (1 pont)
tehát a tanultak szerint legalább 29 éle van. (1 pont)
G páros gráf, mivel a sakktábla mezőinek fekete-fehér színezése G egy jó 2-színezését adja. (2 pont)
Vegyük észre, hogy a 2 mezőt fedő 1×2-es dominók épp G éleinek felelnek meg, (1 pont)
a dominók átfedés nélküli elhelyezése pedig olyan éleknek, melyeknek nincs közös csúcsa, vagyis olyanoknak, melyek párosítást alkotnak. (1 pont)
A feladat tehát nem más, mint annak igazolása, hogy $\nu(G)\geq 8$. Mivel G páros gráf, $\nu(G)=\tau(G)$, tehát elég azt belátnunk, hogy $\tau(G)\geq 8$. (1 pont)
Világos, hogy G-ben minden csúcs foka legfeljebb 4 (hiszen minden mezőnek csak 4 szomszédja lehet él mentén), (1 pont)
így egy legfeljebb 7 csúcsú ponthalmaz csak 28 élet tud lefogni. (1 pont)
Mivel G-nek 29 éle van, csakugyan minden lefogó ponthalmaza legalább 8 elemű; épp ezt kellett igazolnunk. (1 pont)