Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2019. május 20.

Általános alapelvek.

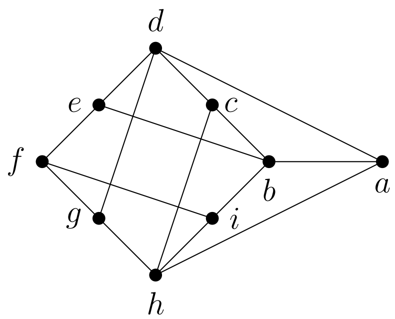
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



* * * * *

Első megoldás. A $\{b, d, f, h\}$ halmaz egy 4 elemű lefogó ponthalmaz (mivel a maradék csúcsok közt nem megy él). (3 pont)
Az ab, cd, ef, gh élek 4 élű párosítást alkotnak, (2 pont)
vagyis a $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség szerint (mely minden gráfban teljesül) (2 pont)
a gráfnak nem létezik 4 csúcsúnál kisebb lefogó ponthalmaza, (2 pont)
így $\{b, d, f, h\}$ minimális lefogó ponthalmaz. (1 pont)

Második megoldás. A $\{b, d, f, h\}$ halmaz egy 4 elemű lefogó ponthalmaz (mivel a maradék csúcsok közt nem megy él). (3 pont)
A gráfnak 15 éle van és a maximális fokszáma 4, így minden lefogó ponthalmaz legalább 4 csúcsot kell, hogy tartalmazzon, (3 pont)
hiszen egy legfeljebb 3 elemű csúcshalmazra legfeljebb 12 él illeszkedne. (3 pont)

$\{b, d, f, h\}$ tehát minimális lefogó ponthalmaz lesz. (1 pont)

Harmadik megoldás. A $\{b, d, f, h\}$, illetve $\{a, c, e, g, i\}$ halmazokon belül nem megy él és együtt lefedik a gráf csúcsait, G tehát páros gráf. (2 pont)
Az ab, cd, ef, gh élek 4 élű párosítást alkotnak, (2 pont)
így $\nu(G) \geq 4$. (1 pont)
Mivel a gráfnak 9 csúcsa van, $\nu(G) = 4$ is teljesül, hiszen 5 élű párosításhoz 10 csúcs lenne szükséges. (1 pont)
Mivel G páros gráf, Kőnig tétele szerint $\tau(G) = \nu(G) = 4$. (2 pont)
A páros gráf egyik osztályát alkotó $\{b, d, f, h\}$ lefogó ponthalmaz így minimális lesz. (2 pont)

2. A G gráfról annyit tudunk, hogy a $K_{9,9}$ teljes páros gráfból kaptuk 8 él törlésével. Határozzuk meg G élkromatikus számát.

* * * * *

Első megoldás. A $K_{9,9}$ gráfban 18 darab 9 fokú csúcs van, (1 pont)
így 8 él törlése után még lesz olyan csúcs (legalább 2 is), melynek foka 9 marad, (2 pont)
hiszen csak a 8 él legfeljebb 16 végpontjának változik (csökken) a fokszáma. (2 pont)
A maximális fokszám a G gráfban így 9, (1 pont)
tehát G élkromatikus száma is 9, (1 pont)
mert Kőnig (élszínezésre vonatkozó) tétele szerint bármely páros gráf élkromatikus száma azonos a maximális fokával. (Szigorúan véve be kéne látni, hogy G páros gráf, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.) (3 pont)

Második (nem túlságosan különböző) megoldás. A $K_{9,9}$ gráf élszínezhető 9 színnel, mivel Kőnig (élszínezésre vonatkozó) tétele szerint bármely páros gráf élkromatikus száma azonos a maximális fokával, ez pedig a $K_{9,9}$-ben 9. (3 pont)
Így természetesen G is élszínezhető 9 színnel. (1 pont)
Ennél kevesebb szín viszont nem elég, mert a maximális fokszám alsó becslés az élkromatikus számra, (1 pont)
és a $K_{9,9}$ gráf 18 darab 9 fokú csúcsából (1 pont)
8 él törlése után még marad 9 fokú, (2 pont)
hiszen csak a 8 él legfeljebb 16 végpontjának változik (csökken) a fokszáma. (2 pont)

3. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $n \geq 5$ csúcsú fa, melyben pontosan két fokszám fordul elő, mégpedig mindkettő $\frac{n}{2}$-ször (n páros).

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy létezik ilyen fa. (1 pont)
Az első pont akkor is jár, ha valaki expliciten nem mondja ki, hogy így indul el, de az érdemi megoldási kísérlete ezen alapul.
A két fokszám közül az egyik az 1 kell legyen, mert minden (legalább 2 csúcsú – ennek hiányáért ne vonjunk le pontot) fának van 1 fokú csúcsa. (2 pont)
Legyen a másik x, ekkor a gráf fokszámösszege $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}x$. (2 pont)
A fának tehát $\frac{n}{4}(x+1)$ éle van. (1 pont)
Másrészt tudjuk, hogy bármely n csúcsú fa élszáma $n-1$, így $\frac{n}{4}(x+1) = n-1$. (1 pont)
Innen $n(x+1) = 4n-4$. Mivel $n(x+1)$ és $4n$ is osztható n-nel, 4 is osztható kell legyen n-nel, (2 pont)
ami $n \geq 5$ miatt lehetetlen, ezzel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

Persze az $n(x+1) = 4n-4$ egyenlőségből számos más módon is ellentmondásra juthatunk, pl. n-nel való osztást követően kiderül, hogy x legfeljebb 2 lehet, mivel azonban 0 és 1 nem jön szóba, $x = 2$ kell legyen, erre viszont $n = 4$ adódik, ami ellentmondás.

4. Egy gráf csúcsai egy 6 elemű halmaz 3 elemű részhalmazai, két különböző csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. Van-e Euler-körséta a gráfban?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az Euler-körséta létezésének szükséges és elégséges feltétele hogy a gráfban minden fokszám páros legyen (1 pont)
és a gráf összefüggő legyen (precízebben: legfeljebb egy olyan komponense legyen, amelyben van él, de persze ennek hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Legyen a 6 elemű halmaz $H = \{a, b, c, d, e, f\}$, a gráf egy tetszőleges csúcsa (mondjuk) $v = \{a, b, c\}$. H azon részhalmazainak száma, melyeknek v-vel pontosan 1 közös elemük van 9. (1 pont)
Ez azért igaz, mert ilyen halmazhoz az $\{a, b, c\}$ halmazból 1 elemet kell választanunk, amit háromféleképp tehetünk meg, (1 pont)
majd ezt a $\{d, e, f\}$ halmazból 2 elemmel kell kiegészítenünk, ami az első választástól függetlenül (1 pont)
háromféleképp tehető meg. (1 pont)
Olyan, v-től különböző háromelemű halmaz, melynek egyetlen közös eleme sincs v-vel pontosan 1 van (éspedig $\{d, e, f\}$), a v csúcs foka így 10, és persze ugyanez igaz a gráf összes többi csúcsára is. (1 pont)
Az összefüggőséget kell még vizsgálnunk. A gráfnak $\binom{6}{3} = 20$ csúcsa van, (1 pont)
így összefüggő, mert minden komponensében legalább 11 csúcsnak kell lennie, így két vagy több komponense nem lehet. (2 pont)

5. Egy 10 csúcsú páros gráfhoz hozzáveszünk két élet. Előfordulhat-e (a gráf és a hozzávenni kívánt élek alkalmas választásával), hogy a kapott gráf kromatikus száma 4?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Ha a gráfot (pl.) a $K_{5,5}$-nek választjuk, akkor ha az éleket különböző osztályokon belülre vesszük fel, akkor keletkezni fog egy K_4 részgráf, a kapott gráf kromatikus száma tehát legalább 4 lesz. (5 pont)
A kromatikus szám ugyanakkor ennél nagyobb nem lehet. (1 pont)
Az eredeti gráf ugyanis 2-színezhető volt (mondjuk az 1,2 színeket használjuk), (2 pont)
az újonnan felvett élek egy-egy végpontját 3-ra, illetve 4-re színezve pedig az új gráf jó színezését kapjuk. (2 pont)

Természetesen nincs feltétlen szükség a $K_{5,5}$-re, bármely olyan páros gráf megfelel, amiben van 4 hosszú kör.

6*. Bejárható-e egy 3×5-ös sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőn éppen egyszer tartózkodik a ló? (A ló a táblán úgy ugrik, hogy két mezőt halad egy irányba (vízszintesen vagy függőlegesen) és egy mezőt az első irányra merőlegesen.)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Tekintsük azt a gráfot, melyben a csúcsok a sakktábla mezői és két csúcs közt akkor vezet él, ha elérhetők egymásból lólépésben. Erről a gráfról kell eldöntenünk, hogy van-e Hamilton-útja. (1 pont)
Jelöljük a sorokat az 1,2,3 számokkal, az oszlopokat az a,b,c,d,e betűkkel. Ekkor a b1,b3,c2,d1,d3 mezőket elhagyva (3 pont)
hét komponens keletkezik, (2 pont)
éspedig az a1,a3,b2,d2,e1,e3 izolált pontok és az a2,c1,c3,e2 csúcsokból álló kör (elég bárhogy, akár egy rajzzal alátámasztani, hogy 7 komponens keletkezik). (3 pont)
Az órán (ezúttal Hamilton-út létezésére) tanult szükséges feltétel tehát nem teljesül, így a gráfban nincs Hamilton-út, vagyis a b) feladat bejárása sem megvalósítható. (1 pont)