Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2019. május 3.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Az $r = 1, 2, \dots, 9$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 10 csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.)

* * * * *

Az Euler-körséta létezésének szükséges és elégséges feltétele hogy a gráfban minden fokszám páros legyen (1 pont)
és a gráf összefüggő legyen (precízebben: legfeljebb egy olyan komponense legyen, amelyben van él, de persze ennek hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Az $r = 1, 3, 5, 7, 9$ értékekre tehát nem lesz a kérdéses gráfoknak Euler-körsétájuk. (1 pont)
Az $r = 2$ és $r = 4$ esetekre is nemleges a válasz, (1 pont)
mert létezik olyan 2-reguláris, illetve 4-reguláris 10 csúcsú gráf, melynek nincs Euler-körsétája. (1 pont)
Ilyen például az $r = 2$ esetben két 5 csúcsú kör uniója, az $r = 4$ esetben pedig két 5 csúcsú teljes gráf uniója. (2 pont)
Az $r = 6$ és $r = 8$ esetekben viszont pozitív lesz a válasz, hiszen a 10 csúcsú, 6- és 8-reguláris egyszerű gráfok összefüggők. (1 pont)
Ez következik pl. a Dirac-tételből (mely szerint ezeknek a gráfoknak még Hamilton-körük is van), de abból is könnyen látható, hogy az ilyen gráfoknak minden komponense legalább 7 csúcsú kell legyen, így csak egy komponensük lehet. (2 pont)

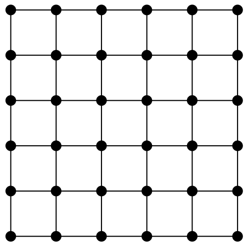
2. Legyen a G teljes gráf csúcshalmaza $V(G) = (1, 2, ..., 10)$. Hagyjuk most el G-ből az $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ és a $(4, 5), (4, 6), (5, 6)$ éleket. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

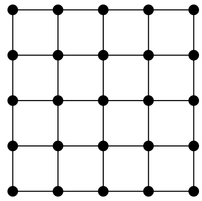
* * * * *

A gráfot meg lehet jól színezni 6 színnel: (1 pont)
az $1, 2, 3$ csúcsok kapják az első, a $4, 5, 6$ csúcsok a második színt, a $7, 8, 9, 10$ csúcsok pedig egyet-egyet

a maradék négyből. (Itt jó, ha valaki röviden kitér arra, hogy ez miért jó színezés, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.) (3 pont)
A gráfban van egy 6 csúcsú klikk, (1 pont)
hiszen (pl.) az $1, 4, 7, 8, 9, 10$ csúcsok klikket alkotnak. (3 pont)
A gráfot tehát 6-nál kevesebb színnel nem lehet megszínezni, (1 pont)
a keresett kromatikus szám az eddigieket felhasználva tehát 6. (1 pont)

3. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy van-e Hamilton-körük.





$*\ *\ *\ *\ *$

Az első gráfnak van Hamilton-köre. Aki megad egy ilyet vagy más módon bizonyítja a létezését, az kapjon erre 3 pontot. Pusztán annak közlése, hogy van Hamilton-kör, nem ér pontot.

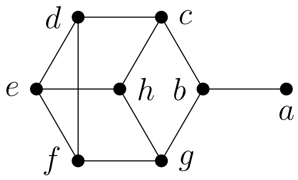
A második gráfban nincs Hamilton-kör, (1 pont)
ugyanis ez 25 csúcsú páros gráf, (1 pont)
így a kisebbik, 12 csúcsú osztályt elhagyva 13 komponens keletkezik, ami (az órán tanultak szerint) Hamilton-kört tartalmazó gráfok esetén nem fordulhat elő (k csúcsot elhagyva legfeljebb k komponens keletkezhet). (2 pont)
A maradék 3 pont akkor jár, ha valaki belátja, hogy a gráf csakugyan páros, ez többféleképp is történhet, a legegyszerűbb megadni egy jó 2-színezést.
Természetesen máshogy is lehet érvelni, meg lehet adni pl. azt a 12 pontot, melyeket elhagyva 13 komponens keletkezik vagy ki lehet színezni a csúcsokat sakktáblaszerűen (ez azonos lesz egy jó 2-színezéssel) és belátni, hogy az esetleges Hamilton-körben a 25. lépésben a kezdőponttól eltérő színű csúcsba érkezünk.

4. Egy 20 csúcsú, 18 élű gráfnak két komponense van. Mutassuk meg, hogy a gráf síkbarajzolható.

$*\ *\ *\ *\ *$

Fel fogjuk használni azt az előadáson tanult állítást, hogy egy összefüggő n csúcsú gráfnak legalább $n-1$ éle van. (1 pont)
Ha a két komponens a, illetve $20-a$ csúcsú, akkor ezek szerint legalább $a-1$, illetve $20-a-1$ élet tartalmaznak. (1 pont)
Mivel e két szám összege 18, ami épp a gráf élszáma, a két komponens pontosan $a-1$, illetve $20-a-1$ élet kell tartalmazzon. (2 pont)
Ezek szerint mindkét komponens fa, (2 pont)
ellenkező esetben elhagyható lenne belőlük egy él (valamelyik körből) úgy, hogy a komponens továbbra is összefüggő legyen, ez viszont az említett állítás miatt lehetetlen. (1 pont)
A fák pedig síkbarajzolhatók, (1 pont)
hiszen a nem síkbarajzolható gráfok Kuratowski tétele szerint tartalmaznak K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, (1 pont)
az ilyenek pedig tartalmaznak kört. (1 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



* * * * *

A gráfban a maximális fok 3, (1 pont)
és a gráf egyszerű, (1 pont)
így Vizing tétele szerint az élkromatikus száma legfeljebb 4. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy az élkromatikus szám pontosan 4. Tegyük fel indirekten, hogy a gráf éleit meg lehet színezni 3 színnel. (1 pont)
Bármely színosztály párosítást kell alkosson, (1 pont)
így legfeljebb 4 élet tartalmazhat, hiszen a gráfnak 8 csúcsa van. (1 pont)
Mivel a gráfnak 11 éle van, a színosztályok közül kettőnek is 4 élűnek kell lennie (ha csak egy 4 élű lenne, akkor a három osztály együtt legfeljebb $3 + 3 + 4 = 10$ élet tartalmazhatna). (2 pont)
Ez azonban lehetetlen, hiszen a 4 élű párosítások minden csúcsot fednek, így minden csúcs foka legalább 2 kéne legyen, az a csúcs foka viszont csak 1. (2 pont)

Természetesen más megoldások is vannak, a 4-élszínezhetőséget konstruktívan is meg lehet mutatni, az alsó becslést pedig arra a gráfra is be lehet látni, amelyet az eredetiből az (a, b) él elhagyásával kapunk. Egy további alternatív lehetőség az alsó becslésre:

Tegyük fel indirekten, hogy a gráf éleit meg lehet színezni 3 színnel. (1 pont)
Ekkor az e csúcsból menő élek és a (d, f) él színe (a színek permutációinak erejéig) egyértelműen megadható (pl. (e, d) 1-es, (e, f) 2-es, (e, h) és (d, f) 3-as. (3 pont)
Így már a (c, d) és (f, g) élek színe is egyértelmű (példánkban (c, d) 2-es, (f, g) 1-es), (1 pont)
innen pedig a (c, h) és (g, h) élek színe is megadható (1, illetve 2). (1 pont)
Ekkor a (b, c) és (b, g) éleknek egyforma színűeknek kéne lenniük, ami lehetetlen, a feltételezett 3-élszínezés tehát nem létezik. (1 pont)

Ha valaki máshogy kezdi el a feltételezett élszínezést, akkor az indirekt feltevés után (amire 1 pontot adjunk) valószínűleg esetszétválasztásra lesz szüksége, ennek a felismerésére 2 pontot adjunk, az esetek helyes kezelésére (amikből minden valószínűség szerint kettő lesz) külön-külön 2-t.

6*. Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden fok 5 vagy 6. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van teljes párosítása.

* * * * *

Első megoldás. Legyen a 6 fokú csúcsok száma a gráfban k. (1 pont)
Ekkor a gráfnak $50 + \frac{k}{2}$ éle van. (1 pont)
Most megmutatjuk, hogy a gráfban a lefogó pontok minimális száma legalább 10, ahonnan Kőnig tétele szerint a feladat állítása már következik, hiszen páros gráfban a lefogó pontok minimális száma és a maximális párosítás mérete azonos. (1 pont)
9 pont legfeljebb $45 + k$ élet tud lefogni, hiszen csak k darab 6 fokú csúcs van a gráfban. (2 pont)
Az is igaz, hogy 9 csúcs k értékétől függetlenül legfeljebb 54 élet fog le. (2 pont)
Mindezek alapján ha 9 csúccsal le lehetne fogni minden élet, akkor egyfelől $50 + \frac{k}{2} \leq 54$, (1 pont)
másfelől $50 + \frac{k}{2} \leq 45 + k$ teljesül. (1 pont)
Az első egyenlőtlenség alapján $k \leq 8$, a második alapján $k \geq 10$ kéne teljesüljön, ami lehetlen. (1 pont)

Második megoldás. A Frobenius-tételt fogjuk használni, ehhez először is belátjuk, hogy a gráf mindkét osztályában (legyenek ezek A és B) 10 csúcs van. (1 pont)

Ha az egyik osztályban legfeljebb 9 csúcs lenne, akkor az innen kimenő élek száma legfeljebb $9 \cdot 6 = 54$ lenne, míg a másik osztályból kimenő élek száma legalább $11 \cdot 5 = 55$. (2 pont)
Mivel mindkét szám a gráf élszámával azonos, ellentmondást kaptunk. (1 pont)
A Hall-feltétel ($\forall X \subseteq A : |N(X)| \geq |X|$) ellenőrzéséhez legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Ha $1 \leq |X| \leq 5$, akkor $|N(X)| \geq 5$ miatt $|N(X)| \geq |X|$ nyilván teljesül (és $X = \emptyset$ is rendben van, ennek hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Ha $|X| \geq 6$, akkor megmutatjuk, hogy $N(X) = B$, amiből a kívánt egyenlőtlenség következik. (2 pont)
Ha $N(X) = B$ nem teljesülne, akkor lenne olyan v csúcs B-ben, melynek nincs X-beli szomszédja, (2 pont)
így viszont a foka legfeljebb 4 lehetne, hiszen A 10 csúcsú és ebből legalább 6 X-beli. (1 pont)