Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok, második zh pótlása — pontozási útmutató
2017. május 8.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 3, a többi csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van páratlan köre.

* * * * *

Egy gráfnak akkor és csak akkor van páratlan köre, ha a gráf nem páros, azt kell tehát megmutatnunk, hogy a szóban forgó gráf nem páros. (1 pont)
Tegyük fel ezért indirekten, hogy a gráf páros. (1 pont)
Ekkor definíció szerint a csúcsai szétoszthatók egy A és egy B osztályra úgy, hogy élek csak A és B között mennek. (1 pont)
A gráf élszáma ekkor nyilván azonos az A-beli és a B-beli csúcsok fokszámösszegével, (2 pont)
ez a két összeg tehát egymással is azonos. (1 pont)
A két 3 fokú csúcsnak emiatt külön osztályba kell kerülnie, (1 pont)
ellenkező esetben abban az osztályban, amelybe nem jut 3 fokú csúcs a fokösszeg 4-gyel osztható lenne, míg a másikban nem. (1 pont)
Mivel a 4 fokú csúcsok száma páratlan, nem kerülhet mindkét osztályba ugyanannyi belőlük, vagyis a két osztály fokösszege (noha modulo 4 azonosak) nem lehet azonos. (1 pont)
Ezzel ellentmondásra jutottunk, ami igazolja, hogy a gráf nem lehet páros. (1 pont)

2. Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük két pontdiszjunkt 3 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

Legyenek a két 3 csúcsú kör csúcsai a, b, c, illetve d, e, f, a gráf maradék két csúcsa g és h. Ekkor az ab, bc, ac, illetve de, ef, df élek egyike sem szerepel G-ben, (1 pont)
így jó színezést kapunk, ha az a, b, c csúcsokat 1-esre, a d, e, f csúcsokat 2-esre, g-t 3-asra, h-t pedig 4-esre színezzük. (3 pont)
A gráf kromatikus száma tehát legfeljebb 4. (1 pont)
Az a, d, g, h csúcsok egy 4 elemű klikket alkotnak a gráfban, (3 pont)
ahonnan következik, hogy a kromatikus szám legalább 4. (1 pont)

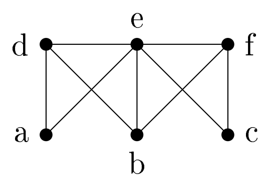
A két becslésből adódik, hogy a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)

3. Az 5 csúcsú teljes gráf egy élét megduplázzuk (vagyis az élet két párhuzamos éllel helyettesítjük). Határozzuk meg a kapott gráf élkromatikus számát.

* * * * *

Az 5 csúcsú teljes gráfban minden fok 4, (1 pont)
és a gráf egyszerű is, (1 pont)
így a Vizing-tétel szerint 5-élszínezhető. (1 pont)
A behúzott plusz élet nyilván színezhetjük egy hatodik színnel, (1 pont)
így a kérdéses gráf élkromatikus száma legfeljebb 6. (1 pont)
A gráfnak 11 éle van, (1 pont)
a maximális párosítás mérete pedig 2. (1 pont)
Ez utóbbi azért érdekes, mert bármely élszínezés egy osztálya párosítás, (1 pont)
ezért 5 szín nem elég az élszínezéshez, hiszen 5 színnel legfeljebb 10 élet színezhetünk meg. (1 pont)
Az élkromatikus szám így pontosan 6. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e.

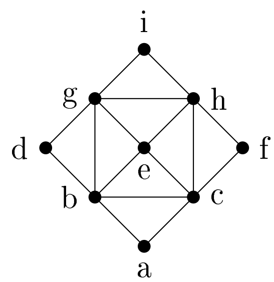


* * * * *

A gráf intervallumgráf, ennek igazolására meg kell adni egy alkalmas intervallumrendszert (elég egy jó rajz). Ha csak (jó) rajz szerepel, az ugyanakkor nem 10 pont, hanem csak 8. A maradék 2 pont annak jár, aki világossá teszi, hogy érti, mit bizonyít a rajz, pl. azzal a módszerrel ahogy megtalálta vagy mondjuk azzal, hogy leírja: sikerült a pontoknak úgy megfeleltetni intervallumokat, hogy a szomszédos pontoknak megfelelők nem diszjunktak, a nem szomszédosak meg diszjunktak.

A sikertelen próbálkozásokért is járhatnak részpontok, akkor is, ha valaki azt próbálja igazolni, hogy a gráf nem intervallumgráf. Különösen értékelendők a nem triviális trükkök: két (vagy még inkább három) nem összekötött ponthoz tartozó intervallumok felvétele. Aki csak színezés segítségével próbál a nem válasz mellett érvelni, az max 2 (de inkább csak 1) pontot kapjon, aki ugyanezzel érvelne az igen válasz mellett, az persze 0-t.

5. Adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



* * * * *

A $\{b, c, g, h\}$ halmaz egy 4 elemű lefogó ponthalmaz a gráfban, (3 pont)
mert minden élnek legalább az egyik végpontját tartalmazza. (1 pont)
Az ac, fh, ig, db élhalmaz egy 4 elemű párosítás, (2 pont)

hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja. (1 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 4$, illetve $\nu(G) \geq 4$, ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 4$ és így a megadott lefogó ponthalmaz minimális. (3 pont)

Azt, hogy $\tau(G) \geq 4$, persze másképp is bizonyíthatjuk. Pl. a gráfnak 16 éle van és minden csúcs foka legfeljebb 5, vagy megmutathatjuk azt is, hogy $\alpha(G) \leq 5$ és használhatjuk az első Gallai-tételt. A bizonyítás maga minden esetben 6 pontot ér, ha valaki csak az $\alpha(G) + \tau(G) = 9$ egyenlőséget írja fel, az ebből 1-et kapjon.

6*. 2035-ben a VIK-es gólyabálon 601 lány és 601 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze lehet-e állítani 601 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök?

* * * * *

Legyen L a lányok, F a fiúk halmaza és legyen G az a páros gráf, melynek L és F az osztályai, két csúcs között pedig akkor vezessen él, ha a megfelelő fiú és lány ismeri egymást. A feladat annak eldöntésével ekvivalens, hogy ebben a páros gráfban van-e teljes párosítás. (1 pont)
A Hall-tétel (vagy a Frobenius-tétel) szerint ez akkor és csak akkor lesz így, ha minden $X \subseteq L$ esetén $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
301 elemű X esetén azonban elképzelhető, hogy $|N(X)| < |X|$. (2 pont)
Osszuk L-et egy L_1 és egy L_2 halmazra, F-et egy F_1 és egy F_2 halmazra úgy, hogy $|L_1| = |F_1| = 300$, $|L_2| = |F_2| = 301$ és persze $L_1 \cup L_2 = L$, $F_1 \cup F_2 = F$ teljesüljön. (2 pont)
Legyenek továbbá ismerősei az összes L_1-beli lánynak az összes F_2-beli fiúk és legyenek ismerősei az összes L_2-beli lánynak az összes F_1-beli fiúk. (2 pont)
Ekkor mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (egész pontosan vagy 300 vagy 301), (1 pont)
de $300 = |N(L_2)| < |L_2| = 301$ miatt a gráfnak nincs teljes párosítása. (1 pont)

Ha valaki nem találja meg a jó példát, de megállapítja, hogy 300-nál kisebb méretű X halmazt nem érdemes keresni, az ezért kaphat 1 pontot.