Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok, első zh pótlása — pontozási útmutató
2017. május 8.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Az `Y` betű legfeljebb egyszer szerepelhet a rendszámban, ezen kívül más kikötés nincs. Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Ha az `Y` egyszer szerepel a rendszámban, akkor a helyét hatféleképp választhatjuk ki, (1 pont)
a maradék 5 helyre pedig helyenként 35-féleképp választhatunk, (1 pont)
vagyis az 5 helyre összesen 35^5-féleképp (ismétléses variáció). (1 pont)
Olyan rendszám tehát, melyben az `Y` egyszer szerepel, összesen $6 \cdot 35^5$-féle van, (1 pont)
hiszen az `Y` 6 lehetséges helyének mindegyikéhez 35^5 rendszám tartozik (és ezek persze mind különbözők). (1 pont)
Ha az `Y` nem szerepel a rendszámban, akkor minden karakter 35-féle lehet, (1 pont)
ilyen rendszám tehát 35^6 van (ismétléses variáció). (1 pont)
A legfeljebb egy `Y`-t tartalmazó rendszámok száma ezek alapján $6 \cdot 35^5 + 35^6$, (2 pont)
hiszen a feltétel szerint az `Y` vagy egyszer vagy nullaszor szerepelhet a rendszámban (és a két lehetőség közül persze csak az egyik teljesülhet). (1 pont)

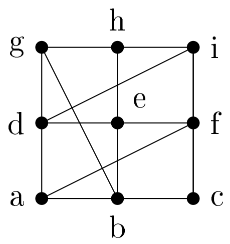
2. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

* * * * *

Ha a 100 csúcsú gráf fa lenne, akkor 99 éle lenne, a gráfunk tehát nem fa, (1 pont)
így kell legyen köre, (2 pont)
mivel összefüggő. (1 pont)
Ha ebből a körből elhagyunk egy élet, akkor (az előadáson tanultak szerint) a gráf összefüggő marad, (1 pont)
és több köre már nem lehet, hiszen ekkor még el tudnánk hagyni belőle élet úgy, hogy összefüggő

maradjon, de ekkor 98 élű összefüggő gráfot kapnánk, ami – az előadáson tanultak szerint – nem lehetséges. (1 pont)
A kapott gráf tehát az eredeti gráf feszítőfája. (1 pont)
Az eredeti gráf minden köre legalább három élből áll (mivel a gráf egyszerű), (2 pont)
vagyis az elhagyandó élet legalább háromféleképp választhatjuk, s így legalább három különböző feszítőfát kaphatunk. (1 pont)

3. Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.



* * * * *

Első megoldás. Megadjuk a gráf egy olyan részgráfját, ami topologikusan izomorf a $K_{3,3}$ gráffal. (1 pont)
A b, d, f csúcsok alkotják a $K_{3,3}$ egyik osztályát, az a, e, g csúcsok a másikat, (3 pont)
ezen kívül a részgráfban szerepel még a h és az i pont. A részgráf élei a megadott osztályok közt menő élek, a gf él kivételével, ami nincs a gráfban, helyette a gh, hi, if éleket vesszük be. (2 pont)
Ez a részgráf csakugyan topologikusan izomorf $K_{3,3}$-mal, hiszen a két osztály közötti élek a gf él kivételével szerepelnek a gráfban, a gf él pedig két ponttal felosztva szerepel. (2 pont)
Mivel a gráfnak van $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja, a Kuratowski-tétel (könnyű iránya) szerint nem síkbarajzolható. (2 pont)

Ha valaki a fenti gondolatmenet egyes elemeit (akár egy meggyőző rajzzal) prezentálja, akkor megkaphatja a vonatkozó pontokat. A Kuratowski-tételt nem muszáj névvel említeni, de az, hogy min alapul a következtetés, kell hogy szerepeljen. Ha valaki azt mutatja meg, hogy a gráfnak nincs K_5-tel topologikusan izomorf részgráfja, de a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot nem találja meg, akkor a megállapításért kapjon 2 pontot.

Második megoldás. A gráf egyszerű és nincs benne háromszög, (3 pont)
hiszen páros gráf: a b, d, f, h csúcsok alkotják az egyik osztályt, a többi csúcs a másikat. (3 pont)
Ha tehát síkbarajzolható lenne, akkor az előadáson tanultak szerint legfeljebb $2n - 4 = 14$ éle lehetne (ahol n a csúcsok száma), (3 pont)
ami ellentmondás, hiszen a gráfnak 15 éle van. (1 pont)

4. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 6. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan egy élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.

* * * * *

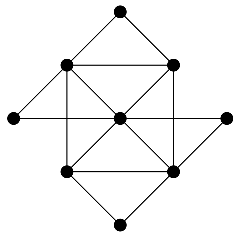
Egy gráfnak akkor és csak akkor van Euler-sétája, ha összefüggő (egész pontosan legfeljebb egy komponensében van él, de az apró pontatlanságért ne vonjunk le pontot) (1 pont)
és legfeljebb két csúcs foka páratlan. (1 pont)
Bárhogy is veszünk hozzá a gráfunkhoz egy élet, legfeljebb két páratlan fokú csúcs keletkezik (sőt, ha figyelünk az egyszerűségre, akkor pontosan kettő), (1 pont)
a kérdés tehát az, hogy az él hozzávételével garantálható-e, hogy a gráf összefüggő legyen. (1 pont)
A gráfnak nem lehet 3 vagy több komponense, (1 pont)
mivel minden komponensében legalább 7 csúcs van, (1 pont)
hiszen egy legfeljebb 6 csúcsú komponensben – a gráf egyszerűsége miatt – nem lehetne minden fok

6. (1 pont)

A gráf tehát vagy összefüggő, vagy két komponense van. Az első esetben az eddigiek szerint egy tetszőleges nem behúzott él bevételével elérhető, hogy a gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája. (1 pont)

A második esetben pedig a két komponens egy-egy csúcsa közé kell élet behúznunk, (1 pont)
ekkor a kapott gráf már összefüggő lesz és nyilván egyszerű marad. (1 pont)

5. Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve Hamilton-útja.



* * * * *

Jó Hamilton-út 2 pont.

A 6 fokú és a két 5 fokú csúcsot elhagyva a gráf 4 komponensre esik szét, így a tanultak szerint nincs Hamilton-köre. (8 pont)

6*. Egy húsz csúcsú, egyszerű gráfban minden fok legalább 9. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egy élet úgy, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-útja.

* * * * *

Vegyünk hozzá a gráfhoz két új csúcsot, (1 pont)
melyeket kössünk össze az összes régi csúccsal. (2 pont)
A kapott gráfnak 22 csúcsa van és minden foka legalább 11. (2 pont)
Mivel a gráf egyszerű is, (1 pont)
A Dirac-tétel szerint van egy C Hamilton-köre. (1 pont)
A két újonnan hozzávett csúcsot elhagyva C két útra esik szét, melyek az eredeti gráf összes csúcsát tartalmazzák. (2 pont)
A két út egy-egy végpontja közé egy élet felvéve Hamilton-utat kapunk. (1 pont)