Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2017. április 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

* * * * *

Mivel a gráfban (nevezzük G-nek) van páratlan kör, nem lehet páros gráf, (1 pont)
a kromatikus száma tehát legalább 3. (1 pont)
Hagyjunk el a páratlan körből egy e élet és nevezzük a kapott gráfot H-nak. (1 pont)
H-ban már nincs páratlan kör, ezért páros gráf, (1 pont)
vagyis a kromatikus száma legfeljebb 2. (1 pont)
Tekintsük H-nak egy jó 2-színezését és tegyük vissza az e élet, majd színezzük át e egyik végpontját egy harmadik, új színre. (3 pont)
Így G-nek egy jó színezését kapjuk, vagyis G kromatikus száma legfeljebb 3. (1 pont)
A kapott két becslésből adódik, hogy G kromatikus száma pontosan 3. (1 pont)

2. Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

Legyenek a 6 csúcsú kör csúcsai sorban a, b, c, d, e, f, a gráf maradék két csúcsa g és h. Ekkor az ab, cd, ef élek egyike sem szerepel G-ben, (1 pont)
így jó színezést kapunk, ha az a és b csúcsokat 1-esre, a c és d csúcsokat 2-esre, az e és f csúcsokat 3-asra, g-t 4-esre, h-t pedig 5-ösre színezzük. (3 pont)
A gráf kromatikus száma tehát legfeljebb 5. (1 pont)
Az a, c, e, g, h csúcsok egy 5 csúcsú klikket alkotnak a gráfban, (3 pont)
ahonnan következik, hogy a kromatikus szám legalább 5. (1 pont)
A két becslésből adódik, hogy a kromatikus szám pontosan 5. (1 pont)

3. Egy páros gráfban a két pontosztály legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Minden $1 \le i \le 8$ és $1 \le j \le 8$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg a gráfban egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrix alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $a_1, a_3, a_6, b_1, b_3, b_7, b_8$ egy (7 elemű) lefogó ponthalmaz a páros gráfban, (3 pont)
mert a nem érintett sorok és oszlopok kereszteződésében minden elem 0. (1 pont)
Az $(a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_7), (a_5, b_8), (a_6, b_5), (a_7, b_3)$ élhalmaz egy (7 elemű) párosítás, (2 pont)
hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja. (1 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \le 7$, illetve $\nu(G) \ge 7$, ahonnan a $\nu(G) \le \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 7$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (3 pont)

Megjegyzés. A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből is látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges (bár az esetleges hibák miatt mégis célszerű) ennek a lépéseit dokumentálni.

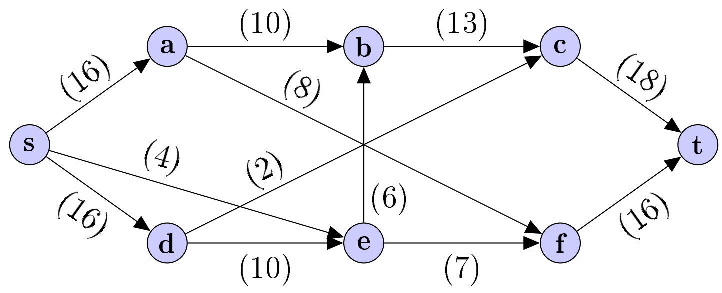
A második és a negyedik részpontszámnál persze máshogy is indokolhatunk, sőt aki (a dolgozatban) meggyőzően demonstrálja, hogy érti, hogy miért lefogó a ponthalmaz, illetve független az élhalmaz, az megkaphatja a pontokat.

4. A VIK-es gólyabálon 12 lány és 198 fiú vesz részt. A szervezők így 12 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Minden lány legalább 11 fiút ismer, a fiúk közül viszont mindenki legfeljebb 11 lányt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 12 párt?

* * * * *

Legyen L a lányok, F a fiúk halmaza és legyen G az a páros gráf, melynek L és F az osztályai, két csúcs között pedig akkor vezessen él, ha a megfelelő fiú és lány ismeri egymást. A feladat annak eldöntésével ekvivalens, hogy ebben a páros gráfban van-e L-et fedő párosítás. (1 pont)
A Hall-tétel szerint ehhez elég azt belátni, hogy minden $X \subseteq L$ esetén $|N(X)| \ge |X|$. (1 pont)
Ha $1 \le |X| \le 11$, akkor ez teljesül, hiszen minden L-beli csúcs foka legalább 11, így $N(X)$ mérete is legalább 11 (a feltétel persze $|X| = 0$ esetén is teljesül; e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (2 pont)
Az $|X| = 12$, vagyis $X = L$ esetet kell még ellenőriznünk. (1 pont)
Világos, hogy $|N(L)| \ge 11$, ahhoz tehát, hogy a Hall-feltétel ne teljesüljön, az kéne, hogy $|N(L)| = 11$ legyen. (1 pont)
Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha L-ben minden csúcs foka pontosan 11 és mind a 12 L-beli csúcs ugyanazzal a 11 F-belivel van összekötve. (2 pont)
Ekkor azonban ezen 11 F-beli csúcs foka 12 lenne, ami a megadott feltétel szerint lehetetlen, tehát van L-et fedő párosítás. (2 pont)

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.



* * * * *

Tekintsük a következő f folyamot: $f(sa) = 16, f(se) = 4, f(sd) = 10, f(ab) = 8, f(af) = 8, f(bc) = 13, f(ct) = 15, f(dc) = 2, f(de) = 8, f(eb) = 5, f(ef) = 7, f(ft) = 15.$ (3 pont)
Az f folyam értéke 30. (1 pont)
Tekintsük most az s, a, b, d, e csúcsok által meghatározott vágást. (2 pont)
Ennek kapacitása az af, dc, bc, ef élek összkapacitása, azaz szintén 30. (1 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 30 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 30 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)

A vágás kapacitásának kiszámításáért akkor jár a pont, ha kiderül, hogy mely élek milyen adatait kellett összeadni ahhoz, hogy kijöjjön a 30-as érték. Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 30 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. A javítóutas algoritmus helyes alkalmazásáért akkor is komoly részpontszámok adhatók, ha a végeredmény nem helyes (persze győződjünk meg róla, hogy nem elvi hibáról van szó). Nem jár érdemi pontszám ugyanakkor találomra vett folyamok és/vagy vágások keresgéléséért, ha ez nem vezet eredményre.

6*. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k számot, melyre a gráf biztosan k-szorosan pontösszefüggő.

* * * * *

A 10 csúcsú teljes gráfnak 45 éle van, így a mi gráfunkat (hívjuk G-nek) a teljes gráfból 5 él elhagyásával kapjuk. (1 pont)
A K_{10} gráfban bármely két u, v csúcs között van 9 (belsőleg) pontdiszjunkt út: (1 pont)
az uv élen kívül a maradék 8 csúcs bármelyikén keresztül vezet egy két élű út u és v között. (2 pont)
Az 5 él elhagyása ebből a 9 útból legfeljebb 5-öt érint (hiszen persze semelyik kettőnek nincs közös éle), (2 pont)
vagyis G-ben bármely két csúcs közt vezet 4 pontdiszjunkt út, (1 pont)
így G Menger vonatkozó tétele szerint 4-szeresen pontösszefüggő (ehhez még az is kell, hogy legyen legalább 5 csúcsa, ami persze teljesül; e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Mivel az 5 elhagyott él csatlakozhat ugyanahhoz a csúcshoz, elképzelhető, hogy G-nek van 4 fokú csúcsa, ekkor G 5-szörösen már nem lehet pontösszefüggő (hiszen a 4 fokú csúcs szomszédait elhagyva G szétesik), (1 pont)
így a keresett maximum 4. (1 pont)

A 4-összefüggőség mellett érvelhetünk a következőképp is: ha G nem 4-összefüggő, akkor el tudunk hagyni 3 pontot úgy, hogy G szétessen. (1 pont)
A 3 elhagyott pontra legfeljebb 24 él illeszkedik (legfeljebb 3 él megy köztük, és legfeljebb $3 \cdot 7$ belőlük a másik 7 csúcsba), (2 pont)
így a maradék (nem összefüggő) gráfnak legalább 16 éle van. (1 pont)

Ebből ellentmondásra fogunk jutni, mert egy 7 csúcsú, 16 élű egyszerű gráf mindig összefüggő: (1 pont) nyilván feltehetjük, hogy csak két komponense van, amelyek 1 és 6, 2 és 5, vagy 3 és 4 csúcsúak: egyik esetben sem kaphatunk 15-nél több élet (az első esetben 15, a másodikban 11, a harmadikban 9 él lehet legfeljebb a maradék gráfban). (3 pont)