Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2017. március 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Három karakternek betűnek, háromnak pedig számnak kell lennie, ezen kívül az egyetlen kikötés, hogy ha három betű áll egymás mellett, akkor azok nem lehetnek egyformák (jó rendszám például 37AAG1, de nem jó ABCD85 és 35HHH2). Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Döntsük el először, hogy melyik helyre kerül szám és melyikre betű. Ez $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ módon lehetséges, hiszen a hat hely közül választjuk azt a hármat, ahova (mondjuk) betű kerül. (2 pont)
Ebből a 20 elrendezésből 4 olyan, melyben a három betű egymás mellett áll (1,2,3,; 2,3,4; 3,4,5; 4,5,6 helyek). (1 pont)
A maradék 16 elrendezés esetén további kikötés nincs, vagyis minden betűt 26-, minden számot 10-féleképp választhatunk. Az előadáson tanultak szerint, vagy a józan eszünket használva ez összesen $16 \cdot 26^3 \cdot 10^3$ lehetőséget jelent. (2 pont)
A 4 kellemetlenebb elrendezés esetén nem lehet a három betű azonos, a betűk tehát $(26^3 - 26)$-féleképp választhatók, hiszen az összes lehetőségek száma 26^3, a három egyforma betűt pedig 26-féleképp választhatjuk. (1 pont)
A számok ekkor is 10^3-féleképp választhatók, (1 pont)
ebben az esetben tehát összességében $4 \cdot (26^3 - 26) \cdot 10^3$ a lehetőségek száma. (1 pont)
Ahhoz, hogy a végeredményt megkapjuk, a két esetben (van, illetve nincs egymás mellett három betű) kapott lehetőségek számát össze kell adni, hiszen a két eset közül pontosan az egyik következik be. (1 pont)
A végeredmény tehát $16 \cdot 26^3 \cdot 10^3 + 4 \cdot (26^3 - 26) \cdot 10^3$. (1 pont)

Aki a binomiális együttható kiszámításáról semmit nem ír, attól vonjunk le 1 pontot, nem kell viszont levonni a köbreemelés részleteinek (pl. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$) elhagyásáért.

2. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

* * * * *

Mivel a gráf összefüggő, van feszítőfája, legyen egy ilyen F. (2 pont)
F 100 csúcsú fa, tehát 99 éle van. (1 pont)
Legyenek a gráf F-ben nem szereplő élei e_1, e_2, e_3. (2 pont)
Ekkor az F-hez e_i-t hozzávéve összefüggő, 100 élű gráfot kapunk, melyben a tanultak szerint kell legyen kör. (2 pont)
Mivel e_i nem éle F-nek, az $F + e_i$ gráf körében nem szerepel e_j, ha $i \neq j$, így az $F + e_1$, $F + e_2$, $F + e_3$ gráfokban kapott körök különbözők, amivel a feladatot megoldottuk. (3 pont)

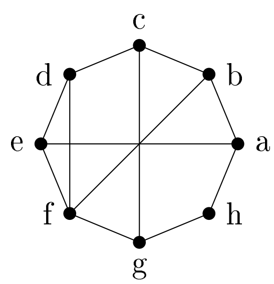
3. Egy 100 csúcsú G összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak G csúcsaival, de csak G 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll. Határozzuk meg G egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát.

* * * * *

Első megoldás. A Kruskal-algoritmus minimális összsúlyú feszítőfát talál, ezt fogjuk használni. Az algoritmus mindig az egyik legkisebb súlyú olyan élet veszi be a fába, ami a már bevettekkel nem alkot kört. Ezért a G esetében addig fog 1 súlyú éleket bevenni, amíg létezik két olyan csúcs, amik aktuálisan különböző komponensben vannak és 1 súlyú él köti össze őket. (2 pont)
Amíg a bevett 1 súlyú élek 7-nél több komponenst alkotnak, lesz ilyen él, (2 pont)
vagyis az algoritmus az 1 súlyú élek által alkotott részgráf komponenseinek egy-egy (1 súlyú élekből álló) feszítőfáját találja meg a futás azon szakaszában, amikor 1 súlyú éleket vesz be (azt is meg lehet mondani, hogy ez hány lépést jelent: 93-at, de ezt ezen a ponton nem muszáj tudni). (3 pont)
A továbbiakban az algoritmus 2 súlyú éleket fog bevenni, mégpedig 6 darabot (hiszen annyi kell ahhoz, hogy az aktuálisan 7 komponensből álló erdőből fa legyen). (2 pont)
A feszítőfának 99 éle van, amiből 6 db súlya 2, a többié 1, így az összsúly 105. (1 pont)

Második megoldás. A feszítőfa (is) csak 1 és 2 súlyú élekből állhat, 2 súlyú élből pedig legalább 6 darabra van szükség, hiszen az összes 1-es élet felhasználva is 7 komponenst kapunk, (3 pont)
tehát bármely feszítőfa súlya legalább $100 - 1 + 6 = 105$. (1 pont)
Másrészt 6 darab 2 súlyú éllel tudunk feszítőfát gyártani. (1 pont)
Vegyük először az 1 súlyú élek komponenseinek egy-egy feszítőfáját. (2 pont)
Mivel az eredeti gráf összefüggő, az előadáson tanultak szerint ezt a 7 komponensű erdőt ki tudjuk egészíteni fává és ehhez 6 élre lesz szükség. (1 pont)
Az így kapott fa 99 élű és legfeljebb (igazából pontosan) 6 darab 2 súlyú élet tartalmaz, tehát a súlya legfeljebb 105. (1 pont)
Ezek alapján a minimális összúlyú feszítőfa súlya pontosan 105. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.

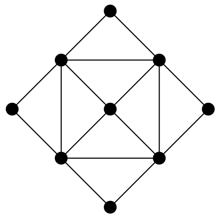


* * * * *

A gráf nem síkbarajzolható, mert van olyan részgráfja, ami topologikusan izomorf a $K_{3,3}$ gráffal. Az a, c, f csúcsok alkotják a $K_{3,3}$ egyik osztályát, a b, e, g csúcsok a másikat. Az a és g közti összeköttetés a h csúcson keresztül, a c és e csúcsok közti összeköttetés a d csúcson keresztül valósul meg (a többi összeköttetés közvetlen). (10 pont)

Ha valaki tudja, hogy mit kéne keresni, de (próbálkozások ellenére) nem találja, akkor (minőségtől függően) 1-3 pontot kapjon. Aki megállapítja, hogy K_5-öt nem érdemes keresni, az plusz 2 pontot kaphat. Aki azt figyeli meg, hogy a h csúcsot elvéve és az ag élet a gráfba berakva olyan gráfot kapunk, ami pontosan akkor síkbarajzolható, ha az eredeti is az volt, szintén kaphat 2 plusz pontot. Ennek a valamivel gyengébb verziójáért, miszerint a h csúcs biztosan nem lesz a $K_{3,3}$ csúcsai közt, szintén járhat 1 plusz pont.

5. Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve Hamilton-útja.



* * * * *

Hamilton-útja van a gráfnak, egy ilyen megadásáért 2 pont jár.
Hamilton-kör viszont nincs, mert a 4 darab 5 fokú csúcsot elhagyva a gráf 5 komponensre esik szét, vagyis a gráf nem teljesíti az előadáson tanult szükséges feltételt. (8 pont)

Máshogy is meg lehet indokolni, hogy a gráfnak nincs Hamilton-köre, természetesen az is 8 pontot ér (ha jó). Aki tudja, hogy mit kéne keresni, de (próbálkozások ellenére) nem találja, az (minőségtől függően) 1-3 pontot kapjon.

6*. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 8. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan 20 élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája.

* * * * *

A gráf komplementerében minden csúcs foka 11. (1 pont)
A komplementerre így teljesül a Dirac-tétel feltétele, vagyis hogy minden csúcs foka legalább a csúcsok számának fele. (1 pont)
Mivel a komplementer egyszerű gráf is, (1 pont)
így a Dirac-tétel szerint van Hamilton-köre. (1 pont)
E körnek egyetlen éle sem szerepel az eredeti gráfban, (1 pont)
vagyis ezeket a gráfhoz véve egyszerű gráfot kapunk, (1 pont)
melyben minden csúcs foka kettővel nagyobb az eredetinél, azaz 10. (1 pont)
A kapott gráfban minden fok páros és a gráf összefüggő (1 pont)
(hiszen tartalmaz Hamilton-kört, amit épp most raktunk bele), (1 pont)
így a tanult tétel szerint van Euler-körsétája. (1 pont)