Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zárthelyi — pontozási útmutató
2015. április 23.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy sakktáblán világos és sötét huszárok állnak, összesen hét darab. Mindegyik huszár legalább két ellenséges huszárt tud ütni. Mutassuk meg, hogy a világos huszárok mind azonos színű mezőn állnak.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Legyen G az a páros gráf, melynek egyik osztályában a világos, másik osztályában a sötét huszárok vannak, két különböző színű huszárt pedig akkor kötünk össze, ha ütni tudják egymást. (1 pont)
A páros gráf kisebbik osztályában (legyen ez A, a másik B) nyilván legfeljebb 3 csúcs van (1 pont)
és mivel minden huszár legalább két másik színű huszárt tud ütni, a gráfban minden fok legalább 2. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy G összefüggő. (1 pont)
Ha ugyanis G-nek legalább két komponense lenne, akkor ezek közül az egyik legfeljebb 1 csúcsot tartalmazna A-ból, (1 pont)
ekkor viszont e komponens B-beli csúcsainak foka nem lehetne legalább 2 (hiszen G egyszerű gráf – e megállapítás hiányáért nem kell pontot levonni). (1 pont)
Mivel G összefüggő, bármely két világos huszár között létezik út gráfban. (1 pont)
Mivel ez az út páros hosszú (hiszen a két huszár a páros gráf ugyanazon osztályában van), (1 pont)
az egyik huszár páros sok lépéssel el tud jutni a másik huszár helyére. (1 pont)
Mivel egy lépésben a huszár világos mezőről sötétre, sötétről pedig világosra lép, páros sok lépés után a kezdetivel azonos színen fog állni, amivel a feladat állítását beláttuk. (1 pont)

2. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás.

* * * * *

Első megoldás. Legyen $e_1 = (a, b)$ a fa egy éle, melyre a foka 1. (1 pont)
Ilyen nyilván létezik, hiszen ismert, hogy minden fában van 1 fokú csúcs. (1 pont)
Hagyjuk el a fából az a és b csúcsokat, ekkor a visszamaradó gráf egy erdő lesz, (1 pont)
melynek legalább 7 éle van, hiszen az eredeti fának 10 éle volt, (1 pont)
melyből legfeljebb 3 olyan van, amely a és b valamelyikével szomszédos. (1 pont)
Az eljárást megismételve (minden erdőnek is nyilván létezik 1 fokú csúcsa) (1 pont)
kapjuk az e_2, (1 pont)
majd az e_3 és e_4 éleket. (1 pont)
Mivel e_i nem tartalmazza $e_1, \ldots, e_{i-1}$ végpontjainak egyikét sem, (1 pont)
az e_1, e_2, e_3, e_4 élek függetlenek lesznek, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. 11 csúcsú fának 10 éle van. (1 pont)
Minden F fa páros gráf, hiszen nem tartalmaz páratlan kört (sőt, párosat sem). (3 pont)
Így Kőnig tétele szerint $\nu(F) = \tau(F)$, elég tehát $\tau(F) \geq 4$-et belátni. (3 pont)
Mivel F minden foka legfeljebb 3, a 10 él lefogásához legalább 4 csúcsra van szükség (hiszen 3 csúcs legfeljebb 9 élet foghat le), amivel az állítást beláttuk. (3 pont)

* * * * *

Harmadik megoldás. 11 csúcsú fának 10 éle van. (1 pont)
Minden F fa páros gráf, hiszen nem tartalmaz páratlan kört (sőt, párosat sem). (3 pont)
Így Kőnig tétele szerint $\chi_e(F) = \Delta(F) \leq 3$. (3 pont)
Vegyük F egy optimális élszínezését; ez legfeljebb 3 színt használ, így a színosztályok közt kell legyen legalább 4 elemű (ellenkező esetben a 3 osztály legfeljebb 9 élet tartalmazna). (2 pont)
Mivel minden színosztály párosítás, az állítást beláttuk. (1 pont)

3. Egy 100 csúcsú teljes gráfból elhagyjuk egy Hamilton-körének éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

A Hamilton-kör mentén másodszomszédos csúcsok 50-en vannak és klikket alkotnak, (2 pont)
így a kromatikus szám legalább 50. (2 pont)
Másrészt a kromatikus szám legfeljebb 50 is, hiszen a Hamilton-kör minden második élét véve teljes párosítást kapunk (1 pont)
és azon pontokat, melyek ebben a párosításban össze vannak kötve, színezhetjük ugyanazzal a színnel (hiszen ők az eredeti gráfban nem szomszédosak). (4 pont)
A kromatikus szám így pontosan 50. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.

* * * * *

Az első gráf kromatikus száma legalább 3, hiszen tartalmaz páratlan kört (egy ötszöget). (1 pont)
Háromszög viszont nincs a gráfban, így a klikkszáma legfeljebb 2. (1 pont)
(A kromatikus szám könnyen láthatóan épp 3, a klikkszám pedig 2, de ezek megállapítására nincs szükség a megoldáshoz.) Mivel intervallumgráfok esetén a kromatikus szám és a klikkszám azonos, a kérdéses gráf nem lehet intervallumgráf. (1 pont)

A második gráf sem intervallumgráf, de ezt valamivel tovább tart belátni. Jelöljük a 3 fokú csúcsot a-val, a szomszédait b, c, d-vel. Tegyük fel, hogy a gráf intervallumgráf és jelöljük az a, b, c, d-nek megfelelő intervallumokat rendre A, B, C, D-vel, legyen továbbá $A = [A_1, A_2], B = [B_1, B_2], C = [C_1, C_2], D = [D_1, D_2]$. (1 pont)
Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $B_1 \leq C_1 \leq D_1$. (1 pont)
Mivel a C intervallumnak nincs közös pontja sem B-vel, sem D-vel, $B_2 < C_1$ és $C_2 < D_1$. (2 pont)
Mivel A-nak B, C, D mindegyikével van közös pontja, az eddigiek szerint teljes egészében tartalmaznia kell C-t, (1 pont)
ekkor viszont c-nek nem lehet olyan szomszédja, amely nem szomszédja egyben a-nak is, ami ellentmondás (hiszen c-nek az a-tól különböző szomszédja épp ilyen). (2 pont)

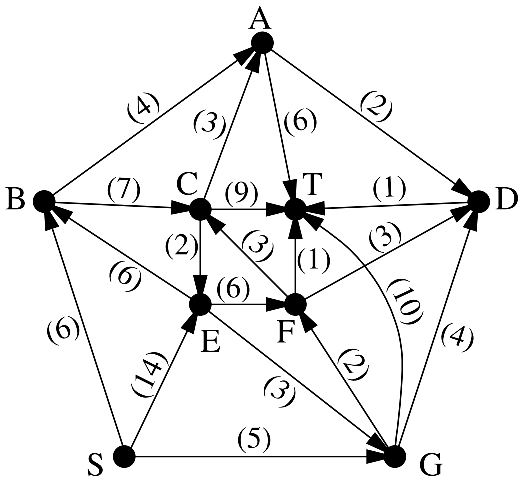
5. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrix alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $a_2, a_3, a_6, a_8, b_1, b_4, b_7, b_9$ lefogó ponthalmaz G-ben (a nem érintett sorok és oszlopok kereszteződésében ugyanis minden elem 0). (4 pont)
Az $(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_5, b_9), (a_6, b_8), (a_7, b_7), (a_8, b_6)$ élhalmaz egy 8 elemű párosítás. (3 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 8$, illetve $\nu(G) \geq 8$, ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 8$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (3 pont)
A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből is látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges (bár az esetleges hibák miatt mégis célszerű) ennek a lépéseit dokumentálni.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



* * * * *

A következő f folyam értéke 24: $f(SB) = 6, f(SE) = 13, f(SG) = 5, f(AT) = 5, f(BA) = 4, f(BC) = 7, f(CT) = 9, f(CA) = 1, f(DT) = 1, f(EB) = 5, f(EF) = 5, f(EG) = 3, f(FT) = 1, f(FC) = 3, f(FD) = 1, f(GT) = 8$ (a többi élen a folyam értéke 0). (4 pont)

Az S, B, D, E, F csúcsok által meghatározott vágás kapacitása az $SG, BA, BC, DT, EG, FT, FC$ élek összkapacitása, azaz szintén 24. (3 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 24 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 24 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például "a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 24 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.