Bevezetés a számításelméletbe II.
1. zárthelyi — pontozási útmutató
2015. október 19.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az aláírás megszerzéséhez a zárthelyiken külön-külön legalább 18 pontot, a két zárthelyin összesen legalább 48 pontot kell elérni. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Abszurdisztánban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol abc 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Három karakternek betűnek, háromnak pedig számnak kell lennie, ezen kívül az egyetlen kikötés, hogy az első két karakter valamelyike betű kell legyen. Hányféle rendszám adható meg Abszurdisztánban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Válasszuk ki először a három betű helyét. Ha erre semmilyen korlátozás nem lenne, akkor $\binom{6}{3}$-féleképp választhatnánk. (1 pont)
Mivel az első két karakter valamelyike betű kell legyen, nem jönnek szóba azok a választások, ahol az első két karakter szám. (1 pont)
A három betű ekkor az utolsó négy pozícióban van, az ilyen választások száma $\binom{4}{3} = 4$. (2 pont)
A betűk helyét tehát a feltételt betartva $\binom{6}{3} - \binom{4}{3}$ módon választhatjuk ki. (1 pont)
A három betűt három adott helyre 26^3-féleképp választhatjuk ki, hiszen a betűk ismétlődhetnek és a sorrendjük is számít. (1 pont)
Hasonlóan, a három számot három adott helyre 10^3-féleképp választhatjuk ki. (1 pont)
Az összes választások számának meghatározásához figyeljük meg, hogy a betűk helyének kiválasztása után a számok helye már adott és hogy két választás különböző, ha a betűk nem pontosan ugyanazon a három helyen vannak, illetve akkor is, ha a három kiválasztott betű vagy szám nem pontosan ugyanaz (sorrendben!). (1 pont)
A keresett szám így a fenti számok szorzataként adódik: $(\binom{6}{3} - \binom{4}{3}) \cdot 26^3 \cdot 10^3$. (1 pont)
Ezt alapműveletek segítségévek felírva $(\binom{6}{3} - \binom{4}{3}) \cdot 26^3 \cdot 10^3 = (\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 4) \cdot 26^3 \cdot 10^3$. (1 pont)

2. Egy házibulin 11 ember vett részt, közöttük a Facebookon pontosan 46 ismeretség van (a buli után). Az este folyamán Palinak nagyon megtetszett egy lány, akit nem ismer. Sajnos nem merte megszólítani, csak a nevét derítette ki. A lány profilját viszont (az ismerősein kívül) csak azok láthatják, akikkel van közös ismerősük. Biztosan meg tudja-e találni Pali a lányt a Facebookon?

* * * * *

Legyenek a G gráf csúcsai a buli résztvevői, két résztvevőt kössünk össze, ha a Facebookon ismerősök (a buli után). Tudjuk, hogy a gráf egyszerű, 11 csúcsa és 46 éle van. (1 pont)
A Palinak, illetve a keresett lánynak megfelelő csúcsok legyenek P, illetve L, a többi csúcs pedig $v_1, v_2, \ldots, v_9$. A 11 csúcsú teljes gráfnak $\binom{11}{2} = 55$ éle van, így G-ből a teljes gráfhoz képest 9 él hiányzik. (2 pont)
Ebből a 9 élből az egyik a (P, L) él, hiszen ők nem ismerik egymást. (1 pont)
Így a $(P, v_1), (P, v_2), \ldots, (P, v_9), (L, v_1), (L, v_2), \ldots, (L, v_9)$ élek közül legfeljebb 8 nincs behúzva a gráfban, (3 pont)
tehát létezik egy olyan v_i, melyre (P, v_i) és (L, v_i) is éle G-nek (ellenkező esetben legalább 9 él nem lenne behúzva az említett 18 közül). (2 pont)
A v_i-nek megfelelő személy tehát Pali és a lány közös ismerőse, így Pali látja a lány Facebook profilját, vagyis meg tudja őt találni. (1 pont)

3. Egy gráfban az s és a csúcsok távolsága (vagyis a köztük vezető legrövidebb út éleinek száma) 2, az s és b csúcsok távolsága 5. Mutassuk meg, hogy a-nak és b-nek nincs közös szomszédja a gráfban.

* * * * *

Legyen az s és a közti (egyik) két élű úton az s és a közti csúcs t és tegyük fel indirekten, hogy a-nak és b-nek van közös szomszédja, legyen ez c. (1 pont)
Ekkor létezik egy, az s, t, a, c, b csúcsokat ebben a sorrendben tartalmazó élsorozat, (4 pont)
amely tehát négy élből áll, (1 pont)
kezdőpontja s, végpontja pedig b. (1 pont)
Ha ez az élsorozat út, akkor ellentmondásra jutottunk, hiszen az s és b közti legrövidebb út öt élből áll. (2 pont)
Ha az élsorozat nem út, akkor az előadáson látottak szerint tartalmaz s és b közti utat, melynek hossza így kisebb lesz négynél, tehát ekkor is ellentmondásra jutunk. (1 pont)

Második megoldás. Az s-ből indított szélességi keresés során (1 pont)
a a második, b az ötödik szinten fog megjelenni. (2 pont)
Ha c közös szomszédjuk lenne, akkor az előadáson látottak szerint c-nek egyfelől az első, a második vagy a harmadik szinten kéne lennie, (2 pont)
hiszen a összes szomszédja ezen szintek valamelyikén van. (1 pont)
Másfelől c-nek a negyedik, az ötödik vagy a hatodik szinten kéne lennie, (2 pont)
hiszen b összes szomszédja ezen szintek valamelyikén van. (1 pont)
Mivel ez egyszerre nem teljesülhet, ilyen c csúcs csakugyan nem létezik. (1 pont)

4. Egy összefüggő gráfról annyit tudunk, hogy tartalmaz egy tíz élű kört. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább tíz különböző feszítőfája van.

* * * * *

Legyenek a kör élei $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$. Megmutatjuk, hogy minden $i \leq 10$ pozitív egész esetén létezik a gráfnak olyan feszítőfája, mely az $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$ élek közül pontosan e_i-t nem tartalmazza, ebből az állítás már nyilván következik. (1 pont)
Súlyozzuk meg a gráf éleit úgy, hogy az $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$ élek az e_i kivételével 1-es súlyt kapjanak, minden más él (beleértve e_i-t is) pedig 2-es súlyt. (4 pont)

Erre az élsúlyozott gráfra a Kruskal-algoritmust futtatva olyan feszítőfát kapunk, mely az $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$ élek közül pontosan e_i-t nem tartalmazza, (1 pont)
hiszen az algoritmus először az összes 1 súlyú élet választja ki (mivel ezek a legkisebb súlyúak és még az összes sem alkot kört), (2 pont)
e_i viszont az 1 súlyú élekkel kört alkot, tehát nem kerülhet be a fába. (2 pont)

Az a megoldás, melyben csak annyi szerepel, hogy a kör éleiből egy előre kiválasztottat elhagyunk, majd az esetleges további körök további éleit elhagyva keresünk feszítőfát, s ekkor az első él tíz lehetséges választása miatt tíz különböző feszítőfát kapunk, erősen hiányos, hiszen akár az is lehetséges, hogy a kör éleiből végül egy sem kerül be a feszítőfába, így nem biztos, hogy valóban különböző fákat kapunk. Ez a megoldás (ha egyébként tökéletesen van leírva) 3 pontot ér.

5. Egy 17 csúcsú teljes gráfot lerajzolunk a síkra, majd az éleit megszínezzük három színnel. Mutassuk meg, hogy lesz a rajzon olyan pont, melyben azonos színű élek keresztezik egymást.

* * * * *

Legyenek a színek (mondjuk) piros, kék és zöld. A gráf összes csúcsából és a piros élekből álló gráfot nevezzük P-nek, a kék, illetve zöld élekből állókat pedig K-nak, illetve Z-nek. (1 pont)
A P, K és Z gráfoknak összesen annyi éle van, mint a 17 csúcsú teljes gráfnak, vagyis $\binom{17}{2} = 136$. (2 pont)
A három gráf közül legalább az egyiknek (mondjuk P-nek) így legalább 46 éle kell legyen, hiszen ha mindhárom gráfnak legfeljebb 45 éle lenne, akkor a háromnak együtt legfeljebb $3 \cdot 45 = 135$ éle lehetne. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy P nem síkbarajzolható, amiből a feladat állítása már következik. (1 pont)
Ha P síkbarajzolható lenne, akkor a tanult felső becslés szerint legfeljebb $3 \cdot 17 - 6 = 45$ éle lehetne, (2 pont)
mivel P egyszerű gráf. (1 pont)
Mivel azonban P-nek legalább 46 éle van, P csakugyan nem síkbarajzolható. (1 pont)

6. Egy 30 csúcsú egyszerű gráfban egy csúcs foka 17, egy másik csúcs foka 13, az összes többi fokszám 14. Mutassuk meg, hogy a gráfból el lehet hagyni egy élet vagy a gráfhoz hozzá lehet venni egy élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája.

* * * * *

Legyen a 17 fokú csúcs a, a 13 fokú b. Ha a és b szomszédosak, akkor a köztük levő él elhagyásával elérhető, hogy a gráfban (mely nyilván egyszerű marad) minden fok páros legyen, hiszen ekkor csak a és b foka csökken eggyel, a többi fok változatlan marad. (1 pont)
Ha a és b nem szomszédosak, akkor behúzhatunk közéjük egy élet úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon, a kapott gráfban ekkor is minden fok páros lesz, hiszen ekkor csak a és b foka nő eggyel, a többi fok változatlan marad. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy mindkét esetben összefüggő gráfhoz jutunk, amiből a tanultak szerint már következik, hogy olyan gráfot kaptunk, melynek van Euler-körsétája. (1 pont)
Az él elhagyásával kapott egyszerű gráfban van egy 16 fokú csúcs, így az őt tartalmazó komponens legalább 17 csúcsú. (2 pont)
Ha a gráfnak lenne másik komponense is, akkor az ezek szerint legfeljebb 13 csúcsot tartalmazhatna, így ott minden fok legfeljebb 12 lehetne (hiszen a gráf egyszerű). (1 pont)
Legfeljebb 12 fokú csúcs viszont csak egy van (az, amelyik az él elhagyása előtt 13 fokú volt), így ebben a komponensben legfeljebb egy csúcs lehetne, de ekkor ennek a foka nem lehetne pontosan 12, a gráfnak tehát csak egy komponense van, vagyis összefüggő. (1 pont)

Hasonlóan (bár valamivel egyszerűbben) látható be az él hozzávételével kapott gráf összefüggősége is: itt lesz egy 18 fokú csúcs, ennek komponense legalább 19 csúcsú, (2 pont)
így egy esetleges másik komponens legfeljebb 11 csúcsot tartalmazna, vagyis itt a csúcsok foka legfeljebb 10 lehetne, ez pedig egyetlen csúcsra sem teljesül. (1 pont)

Az él elhagyásával kapott gráf egyszerűségét nem vizsgáló hallgatóktól (ezért) nem kell pontot levonni.