Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zárthelyi pótlása — pontozási útmutató
2015. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az aláírás megszerzéséhez a zárthelyiken külön-külön legalább 18 pontot, a két zárthelyin összesen legalább 48 pontot kell elérni. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy gráf csúcsai az 1 és 99 közti egész számok, két különböző számot összekötünk, ha van kettőnél nagyobb közös osztójuk. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

* * * * *

A hárommal osztható számok klikket alkotnak a gráfban, (2 pont)
hiszen bármelyik kettőnek a legnagyobb közös osztója legalább 3. (1 pont)
A gráf klikkszáma így legalább 33, tehát a kromatikus szám is legalább 33. (1 pont)
Megadunk egy színezést 33 színnel: színezzük a k. színnel a $3k-2$, $3k-1$ és $3k$ számokat $k=1,2,\ldots,33$ esetén. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy így csakugyan a gráf egy jó 33-színezését kaptuk. Minden csúcsot megszíneztünk, egy színosztályba pedig mindig három olyan szám kerül, amik nincsenek összekötve a gráfban, hiszen közülük bármelyik kettőnek a különbsége legfeljebb 2, így a legnagyobb közös osztójuk sem lehet nagyobb 2-nél. (3 pont)
A kromatikus szám így legfeljebb 33, a korábbi becslés miatt tehát pontosan 33. (1 pont)

2. Mutassuk meg, hogy létezik olyan 7 csúcsú, 8 élű egyszerű gráf, amely nem intervallumgráf.

* * * * *

Legyen G az a gráf, melyet egy hét csúcsú körből kapunk (2 pont)
úgy, hogy összekötünk két csúcsot, melyek közti legrövidebb út a körön 3 élből áll. (2 pont)
G egyszerű gráf, 7 csúcsa és 8 éle van, megmutatjuk, hogy nem intervallumgráf. Ismert, hogy minden intervallumgráfnak azonos a klikkszáma és a kromatikus száma, így elég, ha belátjuk, hogy ez G-re nem teljesül. (2 pont)
Mivel G-nek van páratlan köre (a hét csúcsú kör), G nem páros gráf, a kromatikus száma tehát legalább 3. (2 pont)

G-ben azonban nincs háromszög, vagyis a klikkszáma legfeljebb (mivel van éle, persze pontosan is) 2. (1 pont)
Valóban, ha lenne G-ben háromszög, akkor az tartalmazná az 5 darab 2 fokú csúcs valamelyikét, ezekre azonban teljesül, hogy a két szomszédjuk nincs összekötve (hiszen a távolságuk a körön 2). (1 pont)

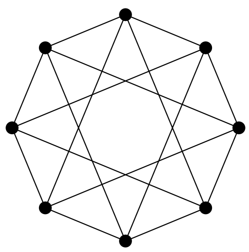
A sikertelen, de valamennyire célirányos próbálkozásokért is járhat pont, legfeljebb 3. A feladat megoldásában valójában nem előremutató, kontextus nélküli állításokért nem jár pont.

3. Egy 10 csúcsú, egyszerű G gráfban minden csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha(G) = 5$, akkor G páros gráf.

* * * * *

Legyen X egy maximális független ponthalmaz a gráfban, ekkor $|X| = 5$. Mivel minden csúcs foka 3, az X-beli csúcsok fokösszege 15. (2 pont)
Az X-beli csúcsokba vezető élek mind X és $\overline{X}$ közt mennek, hiszen X független, (2 pont)
így X és $\overline{X}$ közt pontosan 15 él megy. (2 pont)
Mivel a gráfban éppen ennyi él van (1 pont)
(hiszen a gráfban a fokok összege 30), (1 pont)
G összes éle X és $\overline{X}$ között megy, vagyis G valóban páros gráf. (2 pont)

4. Adjunk meg az alábbi gráfban egy minimális lefogó ponthalmazt.



* * * * *

Első megoldás. A körön minden második csúcsot véve egy 4 elemű X lefogó ponthalmazt kapunk (mivel a maradék csúcsok közt nem megy él). (3 pont)
A kör minden második élét véve pedig 4 élű párosítást kapunk, (2 pont)
vagyis a $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség szerint (mely minden gráfban teljesül) (2 pont)
a gráfnak nem létezik 4 csúcsúnál kisebb lefogó ponthalmaza, (2 pont)
így X minimális lefogó ponthalmaz lesz. (1 pont)

Második megoldás. A körön minden második csúcsot véve egy 4 elemű X lefogó ponthalmazt kapunk (mivel a maradék csúcsok közt nem megy él). (3 pont)
A gráfnak 16 éle van és minden csúcs foka 4, így minden lefogó ponthalmaz legalább 4 csúcsot kell, hogy tartalmazzon, (3 pont)
hiszen egy legfeljebb 3 elemű csúcshalmazra legfeljebb 12 él illeszkedne. (3 pont)
X tehát minimális lefogó ponthalmaz lesz. (1 pont)

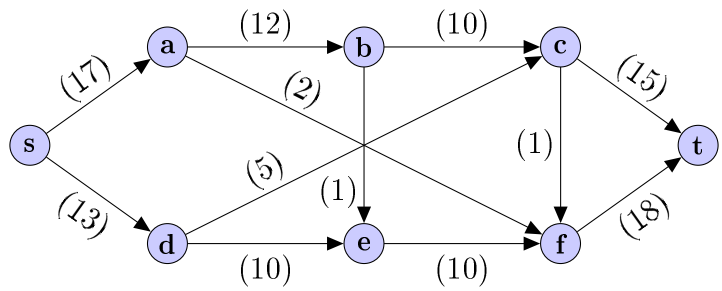
Megjegyzés. G páros gráf (egész pontosan izomorf $K_{4,4}$-gyel), így nem meglepő, hogy $\nu = \tau$ teljesül rá.

5. Egy 99 csúcsú gráfnak van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincsen közös éle. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legalább 5.

* * * * *

99 csúcsú gráfban minden Hamilton-körnek 99 éle van, így a két éldiszjunkt Hamilton-körnek összesen 198. A gráfnak így legalább 198 éle lesz. (3 pont)
Tetszőleges élszínezés minden színosztálya párosítás, ami egy 99 csúcsú gráfban legfeljebb 49 élből állhat. (4 pont)
Ha tehát a a gráf éleit meg lehetne jól színezni 4 színnel, akkor a 4 színosztályban legfeljebb $4 \cdot 49 = 196$ él lehetne, ami ellentmondás, hiszen a gráfnak legalább 198 éle van. (3 pont)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.



* * * * *

A következő f folyam értéke 26: $f(sa) = 13, f(sd) = 13, f(ab) = 11, f(af) = 2, f(bc) = 10, f(be) = 1, f(ct) = 14, f(cf) = 0, f(de) = 9, f(dc) = 4, f(ef) = 10, f(ft) = 12$. (4 pont)
Az s, a, b csúcsok által meghatározott vágás kapacitása az sd, af, bc, be élek összkapacitása, azaz szintén 26. (3 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 26 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 26 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)
Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 26 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. A javítóutas algoritmus helyes alkalmazásáért akkor is komoly részpontszámok adhatók, ha a végeredmény nem helyes (persze győződjünk meg róla, hogy nem elvi hibáról van szó). Nem jár érdemi pontszám ugyanakkor találomra vett folyamok és/vagy vágások keresgéléséért, ha ez nem vezet eredményre.