Bevezetés a számításelméletbe II.
1. zárthelyi pótlása — pontozási útmutató
2015. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az aláírás megszerzéséhez a zárthelyiken külön-külön legalább 18 pontot, a két zárthelyin összesen legalább 48 pontot kell elérni. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Sajtótájékoztatónkon kézigránátokat, páncélöklöket és lángszórókat szeretnénk ízlésesen sorbarendezni egy asztalon. Ehhez az szükséges, hogy mindhárom eszközből jelenjen meg legalább egy, de két egyforma eszköz ne kerülhessen egymás mellé. Hányféle sorrend közül választhatunk, ha összesen tíz eszközt teszünk az asztalra? (A kézigránátok, páncélöklök, illetve lángszórók egyformák és mindegyik korlátlan mennyiségben áll rendelkezésre.)

* * * * *

Határozzuk meg először azt, hogy hány olyan sorrend van, melyben két egyforma eszköz nem kerülhet egymás mellé (nevezzük az ilyet tetszetősnek). Az első típust háromféleképp választhatjuk ki, (1 pont)
a második azonban nem lehet azonos típusú az elsővel, így erre csak két választási lehetőségünk lesz. (1 pont)
Ugyanez igaz a harmadik és minden további eszközre is, ezekre is kétféle választásunk lesz, hiszen nem lehetnek azonos típusúak az őket közvetlenül megelőző fegyverrel. (1 pont)
A tetszetős sorrendek számának meghatározásához a választási lehetőségek számát össze kell szorozni, hiszen a három kezdés mindegyikéhez két különböző folytatás tartozik, majd az így kapott hatféle (kételemű) kezdés mindegyikét is két módon folytathatjuk, s.í.t., (1 pont)
a szóban forgó sorrendek száma tehát $3 \cdot 2^9$. (1 pont)
Vizsgáljuk most meg, hogy ezen sorrendek közül hány olyan van, ami az ízlésesség kritériumainak már nem felel meg, azaz nem minden fegyvertípus jelenik meg benne. (1 pont)
Mivel két típusra nyilván szükség van, azt kell megvizsgálnunk, hogy a tetszetős sorrendek közül hányban szerepel csak pontosan két típus. (1 pont)
A hiányzó típust háromféleképp választhatjuk ki. (1 pont)
Ha már tudjuk, hogy melyik két típus szerepel, akkor kétféleképp választhatjuk ki az elsőt, a továbbiakban azonban mindig csak egy választásunk lesz, hiszen a megelőző típust nem választhatjuk. A tetszetős, de nem ízléses sorrendek száma tehát 6. (1 pont)

Az ízléses sorrendek száma az eddigiek alapján tehát $3 \cdot 2^9 - 6$. (1 pont)

2. Egy 100 csúcsú egyszerű gráf négy csúcsáról tudjuk, hogy a fokuk (külön-külön) legalább 24 és közülük bármely két csúcs között létezik út, sőt azt is, hogy közülük bármelyik kettő között a legrövidebb út 3 élből áll. Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő.

* * * * *

A feladatban szereplő legalább 24 fokú csúcsok legyenek a, b, c, d. Ezek a csúcsok a gráfnak ugyanabban a komponensében vannak, hiszen bármelyik kettő között létezik út a gráfban. (1 pont)
Mivel a, b, c, d közül semelyik kettő között nincs él vagy két élű út, egyikük sem lehet egy másik szomszédja (1 pont)
és semelyik kettőnek nincs közös szomszédja sem. (2 pont)
Az a csúcs 24 szomszédja, a b csúcs 24 szomszédja, a c csúcs 24 szomszédja és a d csúcs 24 szomszédja tehát csupa különböző csúcs (összesen 96), melyek a, b, c, d mindegyikétől is különböznek. (3 pont)
Ez a 96 csúcs is ugyanabban a komponensben van, mint amiben a, b, c és d, hiszen mindegyikük szomszédja a-nak, b-nek, c-nek vagy d-nek. (1 pont)
Ebben a komponensben tehát legalább 100 csúcs lesz, vagyis a gráfnak más komponense nem lehet, a gráf így csakugyan összefüggő. (2 pont)

3. Egy egyszerű gráf élhalmaza előáll két feszítőfájának diszjunkt uniójaként (vagyis a gráf minden éle a két feszítőfa közül pontosan az egyikben van benne). Mutassuk meg, hogy a gráfnak van olyan csúcsa, aminek a foka 2 vagy 3.

* * * * *

Legyen a gráf csúcsainak száma n. Ekkor mindkét feszítőfának $n-1$ éle van, (2 pont)
a gráfnak pedig így összesen $2n-2$. (1 pont)
Ebből következik, hogy gráfnak lesz olyan csúcsa (hívjuk v-nek), melynek foka legfeljebb 3, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis minden fok legalább 4 lenne, (1 pont)
s ekkor az élek száma (ami a fokösszeg fele) legalább $2n$ lenne, ami ellentmondás. (2 pont)
Minden csúcsra igaz ugyanakkor a gráfban, hogy a foka legalább 2, (1 pont)
hiszen minden csúcsnak mindkét feszítőfában legalább 1 a foka. (1 pont)
A v csúcs foka tehát 2 vagy 3. (1 pont)

4. Egy 10 csúcsú, egyszerű, összefüggő gráf éleinek mindegyikéhez az 1,2,3,4 számok valamelyikét rendeljük súlyként úgy, hogy mind a négy szám legalább háromszor fordul elő. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van olyan feszítőfája, melynek súlya legfeljebb 27.

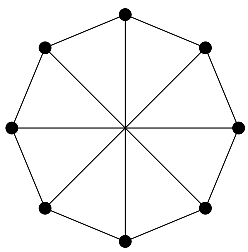
* * * * *

A Kruskal-algoritmust futtatjuk. Legyenek az ez által kiválasztott élek sorrendben $e_1, e_2, \ldots, e_9$. (A gráf 10 csúcsú, így a feszítőfának 9 éle lesz.) (1 pont)
Az e_1 és e_2 élek 1 súlyúak, hiszen semelyik két él sem alkot kört a gráfban. (2 pont)
Ha e_3 is 1 súlyú, akkor kész is leszünk, hiszen minden további él súlya is legfeljebb 4, azaz a feszítőfa összsúlya legfeljebb $1+1+1+6 \cdot 4 = 27$ lesz. (1 pont)
Ha e_3 nem 1 súlyú, akkor a harmadik 1 súlyú él és e_1, e_2 kört alkot. (1 pont)
Ekkor bármely 2 súlyú élre teljesül, hogy nem alkot kört e_1, e_2-vel, így e_3 2 súlyú lesz. (1 pont)
Ha e_4 is 2 súlyú, akkor is kész leszünk ($1+1+2+2+5 \cdot 4 = 26$). (1 pont)
Ha e_3 nem csatlakozik sem e_1-hez, sem e_2-höz, akkor ez mindenképp bekövetkezik, hiszen az egyetlen olyan él, mely kört alkot e_1, e_2-vel nem 2 súlyú (hanem 1). (1 pont)

Ha e_3 csatlakozik e_1-hez vagy e_2-höz (esetleg mindkettőhöz), akkor elképzelhető, hogy a maradék két 2 súlyú él (külön-külön) kört alkot az e_1, e_2, e_3 élhalmazzal, de csak akkor, ha az e_1, e_2, e_3 négy végpontja által feszített részgráf egy 4 csúcsú teljes gráf és minden éle 1 vagy 2 súlyú. (1 pont)
Ekkor azonban e_4 biztosan 3 súlyú lesz, hiszen az e_1, e_2, e_3 élhalmazzal egyetlen 3 súlyú él sem alkot kört. Ekkor is teljesül, hogy az élek összsúlya legfeljebb 27 $(1+1+2+3+5\cdot 4 = 27)$. (1 pont)

A fenti megoldás e_4 súlyának taglalásakor kezd elbonyolódni, ehelyett használhatjuk az alábbi gondolatot. A legfeljebb 3 súlyú élek száma 9, az ezek végpontjai által feszített részgráfnak így legalább 5 csúcsa van, (1 pont)
hiszen 4 csúcsú egyszerű gráfnak legfeljebb 6 éle lehet. (1 pont)
Az elsőnek választott 4 él között így nem lehet 4 súlyú, hiszen egy legalább 5 csúcsú, 9 élű gráfban minden 3 élű erdőhöz választható negyedik él úgy, hogy a gráf erdő maradjon. (2 pont)

5. Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.



* * * * *

Legyenek a gráf csúcsai a legfelsőtől a körön jobbra haladva a, b, c, d, e, f, g, h. Megmutatjuk, hogy a gráfnak van $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja. Hagyjuk el a gráfból a (c, g) élet, majd helyettesítsük a $h - g - f$ utat és a $b - c - d$ utat egy-egy éllel. A kapott gráf épp egy $K_{3,3}$ lesz, melynek egyik osztályában az a, f, d, másik osztályában a b, e, h csúcsok lesznek. Mivel a gráfnak van $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja, a gráf nem síkbarajzolható.
Teljes megoldás 10 pont (a helyettesítések és a $K_{3,3}$ demonstrálható rajzon is), olyan megoldások, melyek a $K_{3,3}$ keresésére irányulnak, de sikertelenek, érdemi részpontokat kaphatnak, a próbálkozás minőségétől függően. Aki belátja, hogy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot nem érdemes keresni, az kaphat ezért két pontot (ha ezzel nem lépné túl a 10 pontot, illetve ha a megoldása nem teljes, akkor a 8 pontot). K_5 keresésére irányuló próbálkozásokért legfeljebb 2 pontot adjunk.

6. Egy 12 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan 10 élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája.

* * * * *

Ahhoz, hogy egy gráfnak Euler-körsétája legyen, szükséges, hogy minden foka páros legyen. Mivel az eredeti gráf minden foka páros, ezért szükséges, hogy a 10 újonnan hozzávett él olyan részgráfot alkosson, melyben szintén minden fok páros. (1 pont)
Ez elérhető például egy 10 hosszú körrel. (1 pont)
Mivel az új gráfnak is egyszerűnek kell lennie, a 10 hosszú kör $\overline{G}$ részgráfja kell legyen. (1 pont)
$\overline{G}$ 12 csúcsú, 7-reguláris gráf, így két tetszőleges csúcsát elhagyva olyan gráfot kapunk, melynek 10 csúcsa van és minden fok legalább 5. (3 pont)
Mivel ez a gráf is egyszerű, Dirac tétele szerint van Hamilton-köre, ami épp a kívánt 10 csúcsú kör lesz. (1 pont)
Ezt a kört a gráfhoz véve tehát olyan gráfot kapunk, melyben 10 darab 6 fokú és 2 db 4 fokú csúcs

van. Ahhoz, hogy ebben az új gráfban csakugyan legyen Euler-körséta szükséges és elégséges is, hogy a gráf összefüggő legyen. (1 pont)
Ez könnyen láthatóan teljesül is: a 6 fokú csúcsok az újonnan hozzávett kör csúcsai, így természetesen ugyanabban a komponensben vannak, amelynek legalább egy (sőt, három) pontjával mindkét 4 fokú csúcs is össze van kötve. (2 pont)

A kapott gráf összefüggősége persze máshogy is igazolható, pl.: a 6 fokú csúcsok a gráf egyszerűsége miatt csak olyan komponensben lehetnek, melynek legalább 7 csúcsa van. (1 pont)
Ilyen komponensből azonban csak egy lehet a gráfban (hiszen csak 12 csúcsunk van), tehát a 6 fokú csúcsok mind ugyanabban a komponensben vannak, amiben (ismét a gráf egyszerűsége miatt) benne kell legyenek a 4 fokú csúcsok is. (1 pont)