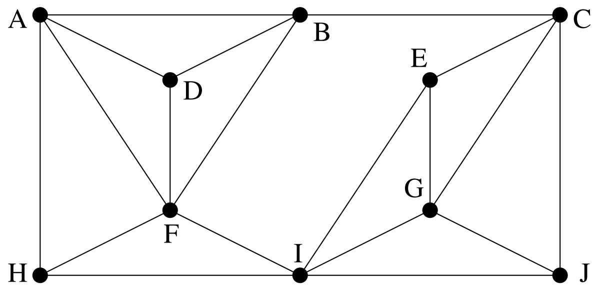
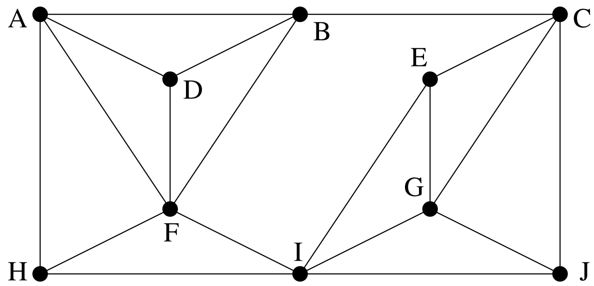
Bevezetés a Számításelméletbe II.
Vizsgafeladatok
(2017/2018. tanév, második félév)

Az alábbi feladatok közül azt az egyet kell kidolgozni, amelyet a vizsgatétellel egyidejűleg kapott. A vizsgán nem csak a feladat végeredményét kell ismertetni, a hangsúly a világos magyarázaton, az indokláson van.

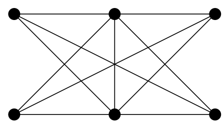
Kérjük, hogy erre a lapra ne írjon, ne rajzoljon. Amennyiben ez szükséges, a feladatban szereplő gráfot másolja le a lapjára és azon dolgozzon.



1. Maximálisan hány páronként éldiszjunkt, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az ábrán látható gráfban?
a) B és G b) A és I c) I és C d) B és C



2. a) Milyen k értékekre igaz, hogy az ábrán látható gráf k-szorosan (pont)összefüggő?
b) Igaz-e, hogy az ábrán látható gráf 4-szeresen él-összefüggő?

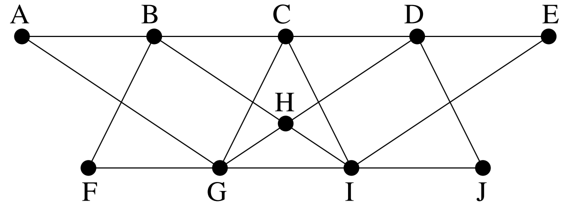
3. Milyen k értékek esetén k-szorosan összefüggőek, illetve k-szorosan élösszefüggőek az alábbi gráfok?
a) egy 100 pontú út;
b) egy 100 pontú kör;
c) a $K_{10,20}$ teljes páros gráf;
d) 

4. A 15 pontú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összekötöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4 pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa.
a) Maximálisan hány páronként csúcsdiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?
b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?

5. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e, hogy G minden esetben
a) háromszorosan összefüggő; b) háromszorosan élösszefüggő?

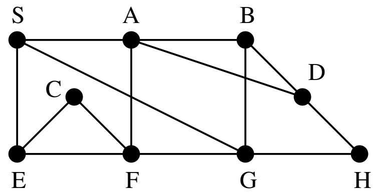
6. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt" r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k-szorosan összefüggő.

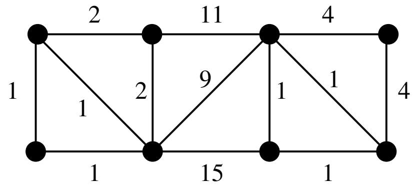
7. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden v csúcsra v távolságát a kezdőponttól, azt a csúcsot, ahonnan az eljárás v-t elérte, valamint a bejáráshoz tartozó BFS-fát).
a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E
b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J



8. a) A BFS algoritmus a jobbra látható ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, □, H, □, F, C, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

b) Tartalmazhatja-e a {D, H} élet a gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



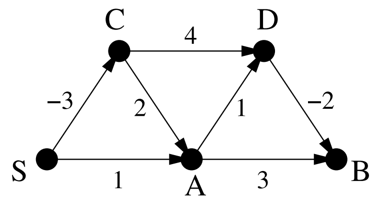


9. Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.

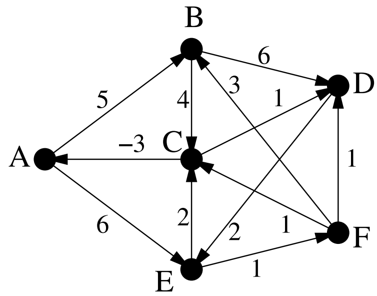
10. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \leq i, j \leq 100$, $i \neq j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya az i és j értékek közül a nagyobb. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G-ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

11. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \leq i, j \leq 100$, $i \neq j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya 1, ha $i \leq 50$ és $j \leq 50$; legyen az $\{i, j\}$ él súlya 2, ha $i \geq 51$ és $j \geq 51$; végül minden más él súlya legyen 3. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G-ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

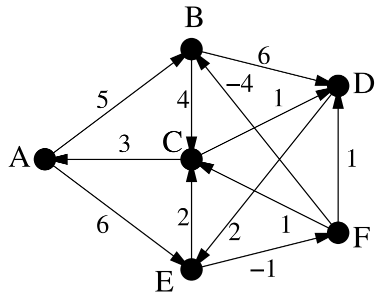
12. Határozzuk meg a Ford-algoritmus segítségével a jobbra látható gráfban az S pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát és adjunk meg egy S-ből B-be vezető legrövidebb utat. Az algoritmus futtatásakor az éleket ábécé szerint növekvően sorszámozzuk: $A \to B$, $A \to D$, ..., $S \to C$.



13. Alkalmazhatjuk-e a jobbra látható gráfban a Ford-algoritmust a B-ből a többi csúcsba vezető legrövidebb utak megtalálására? Ha igen, hajtsuk is végre az algoritmust és adjunk meg egy B-ből F-be vezető legrövidebb utat. Az algoritmus futtatásakor az éleket ábécé szerint növekvően sorszámozzuk: $A \to B$, $A \to E$,..., $F \to D$.



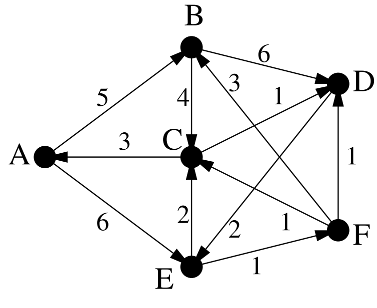
14. Alkalmazzuk a jobbra látható gráfban a Ford-algoritmust az A-ból a többi csúcsba vezető legrövidebb utak hosszának meghatározására és adjunk meg egy A-ból C-be vezető legrövidebb utat. Az algoritmus futtatásakor az éleket ábécé szerint növekvően sorszámozzuk: $A \to B$, $A \to E$,..., $F \to D$.



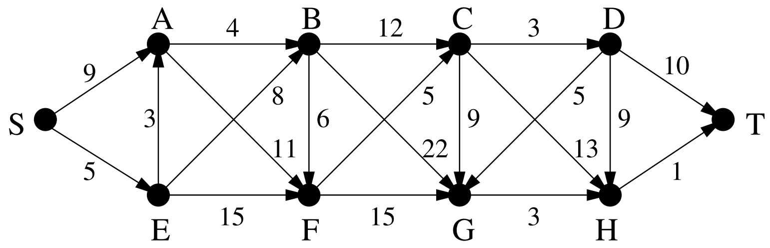
15.a) Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmus segítségével az A csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát a jobbra látható gráfban és adjunk meg egy A-ból D-be vezető legrövidebb utat.

b) Valamely él súlyát 1-gyel csökkentjük. Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az A-tól mért távolságok?

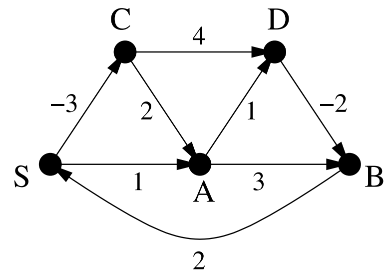
c) Vegyük hozzá a gráfhoz a $B \to E$ élt $t \geq 0$ élsúllyal. A t mely értékeire változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?



16. Határozzuk meg az S csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát az alábbi gráfban és adjunk meg egy S-ből T-be vezető legrövidebb utat. A feladatot a tanult algoritmusok közül az erre a célra legalkalmasabbal oldjuk meg.



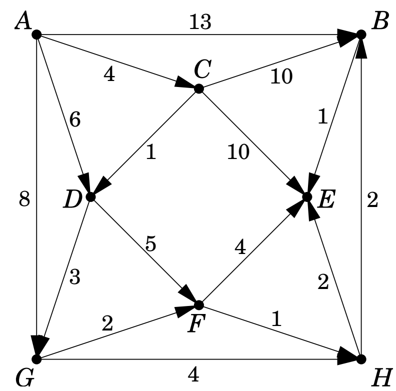
17. Határozzuk meg a jobbra látható gráfban minden lehetséges (u, v) csúcspárra az u-ból v-be vezető legrövidebb út hosszát a Floyd-algoritmus segítségével. Az algoritmus futtatásakor a csúcsokat ábécé szerinti növekvő sorrendben sorszámozzuk.



18.a) Hajtsuk végre a jobbra látható irányított gráf egy-egy mélységi bejárását az A, illetve a G csúcsokból indítva. Határozzuk meg a mélységi és befejezési számokat és adjuk meg a kapott DFS-erdőket is.

b) Döntsük el, hogy a gráf aciklikus-e és ha igen, adjuk meg egy topologikus sorrendjét.

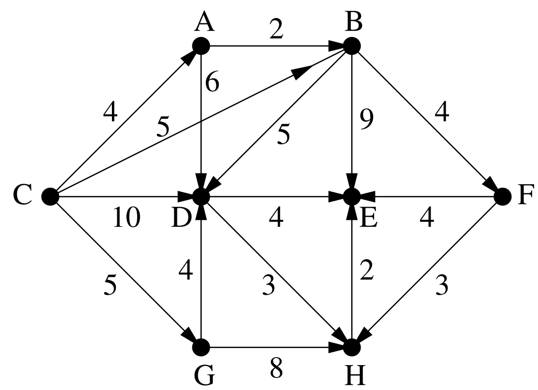
c) Számítsuk ki az A csúcsból a többi csúcsba menő legrövidebb és leghosszabb utak hosszát.



19.a) Hajtsuk végre a jobbra látható irányított gráf egy-egy mélységi bejárását az C, illetve a G csúcsokból indítva. Határozzuk meg a mélységi és befejezési számokat és adjuk meg a kapott DFS-erdőket is.

b) Döntsük el, hogy a gráf aciklikus-e és ha igen, adjuk meg egy topologikus sorrendjét.

c) Számítsuk ki a C csúcsból a többi csúcsba menő legrövidebb és leghosszabb utak hosszát.



20. A 6 pontú G egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a $d(v)$ mélységi, illetve az $f(v)$ befejezési számok láthatók jobbra.

a) Adjuk meg a bejáráshoz tartozó DFS-fa éleit.

b) Legalább, illetve legföljebb hány éle lehet G-nek?

v	x	y	z	u	v	w
$d(v)$	1	2	6	3	4	5
$f(v)$	6	4	5	3	1	2