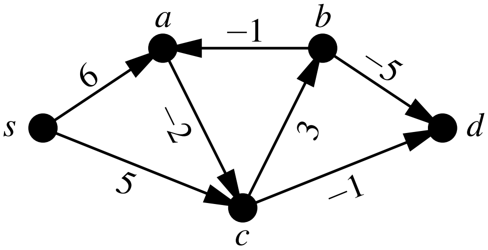
Bellman-Ford algoritmus

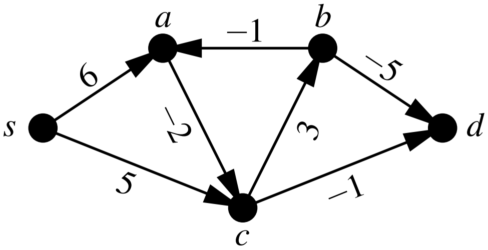
Bemenet: $G = (V, E)$ irányított gráf (n csúcsú), $s \in V$ csúcs
$w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény

$táv_0(s) \leftarrow 0$; minden $v \in V$, $v \neq s$-re $táv_0(v) \leftarrow \infty$
minden $v \in V$, $v \neq s$-re $előző_0(v) \leftarrow *$
ciklus: k **fut** 1-**től** $(n-1)$-**ig**
    $táv_k(s) \leftarrow 0$
    ciklus: v **végigfut a** $V(G) \setminus \{s\}$ **csúcshalmazon**
        $táv_k(v) \leftarrow táv_{k-1}(v)$
        $előző_k(v) \leftarrow előző_{k-1}(v)$
        ciklus: $e = (u, v)$ **végigfut a** v-**be belépő éleken**
            ha $táv_k(v) > táv_{k-1}(u) + w(e)$, **akkor**:
                $táv_k(v) \leftarrow táv_{k-1}(u) + w(e)$
                $előző_k(v) \leftarrow u$
        ciklus vége
    ciklus vége
ciklus vége
Minden $v \in V$-re $táv(v) \leftarrow táv_{n-1}(v)$, $előző(v) \leftarrow előző_{n-1}(v)$

Bellman-Ford algoritmus

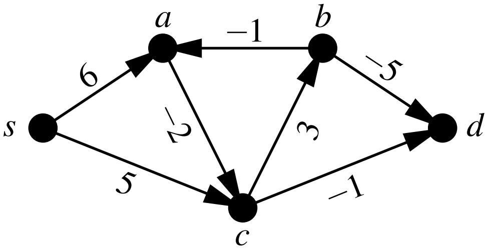


Bellman-Ford algoritmus



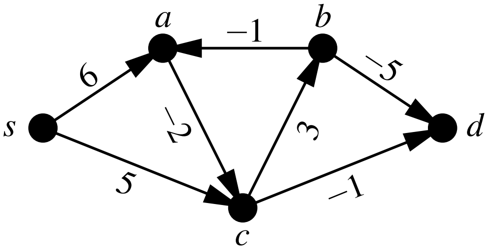
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0									
1									
2									
3									
4									

Bellman-Ford algoritmus



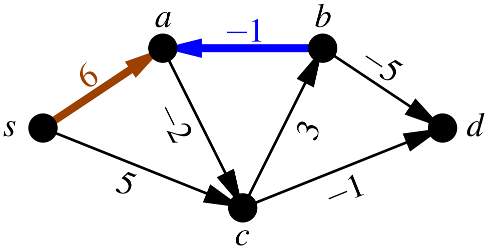
				$v \mapsto táv_k(v)$				$v \mapsto előző_k(v)$		
k	s	a	b	c	d		a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞		$*$	$*$	$*$	$*$
1										
2										
3										
4										

Bellman-Ford algoritmus



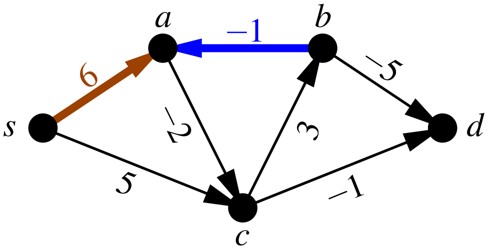
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0								
2									
3									
4									

Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0+6, \infty-1\} = 6$

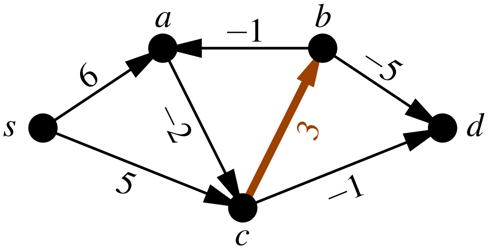
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	**0**	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	∞				$*$			
2									
3									
4									



$\min\{0 + 6, \infty - 1\} = 6$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6				s			
2									
3									
4									

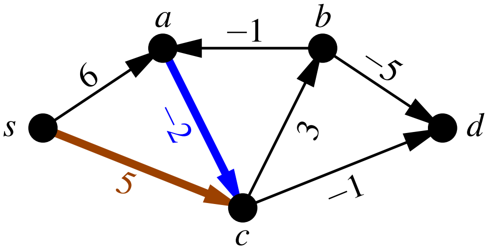
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{\infty + 3\} = \infty$

		$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d		a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞		$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞				s	$*$		
2										
3										
4										

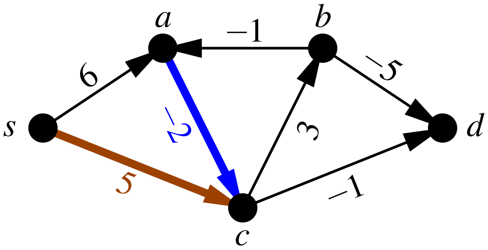
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0 + 5, \infty - 2\} = 5$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	**0**	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	∞		s	$*$	$*$	
2									
3									
4									

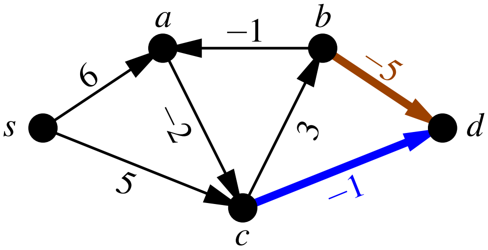
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0+5, \infty-2\} = 5$

k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
			$v \mapsto táv_k(v)$				$v \mapsto előző_k(v)$		
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5		s	$*$	s	
2									
3									
4									

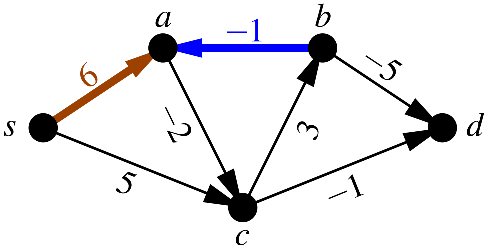
Bellman-Ford algoritmus



$$\min\{\infty - 5, \infty - 1\} = \infty$$

		$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$		
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2									
3									
4									

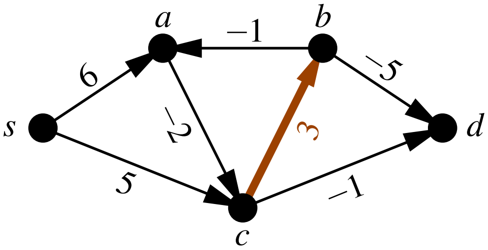
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0+6, \infty-1\} = 6$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	**0**	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6				s			
3									
4									

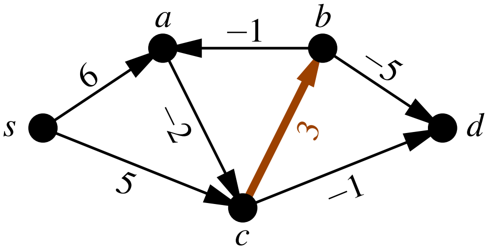
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{5 + 3\} = 8$

		$v \mapsto táv_k(v)$				$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	**5**	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	∞			s	$*$		
3									
4									

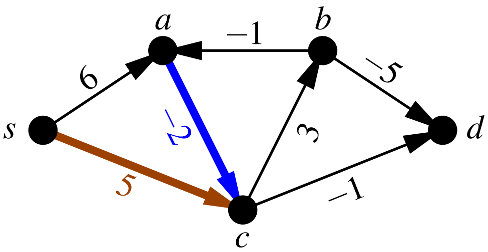
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{5+3\} = 8$

k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8			s	c		
3									
4									

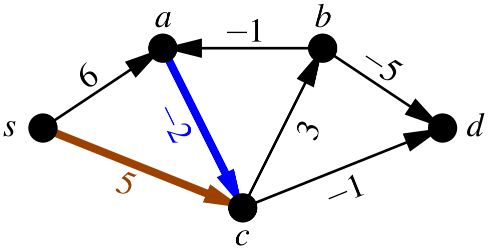
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0+5, 6-2\} = 4$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	**0**	**6**	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	5		s	c	s	
3									
4									

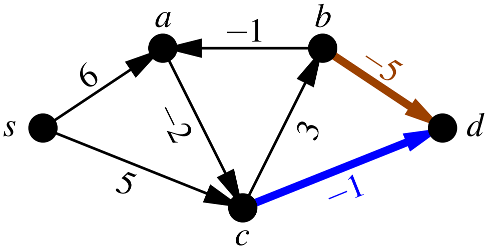
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0+5, 6-2\} = 4$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4		s	c	a	
3									
4									

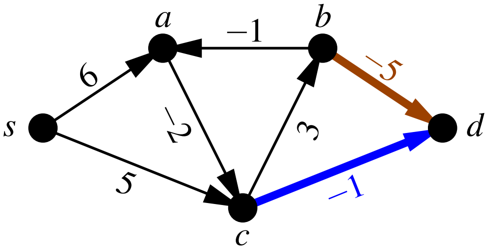
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{\infty - 5, 5 - 1\} = 4$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	**5**	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	∞	s	c	a	$*$
3									
4									

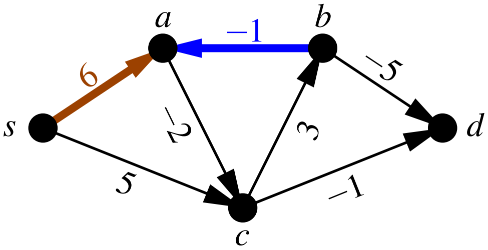
Bellman-Ford algoritmus



$$\min\{\infty - 5, 5 - 1\} = 4$$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3									
4									

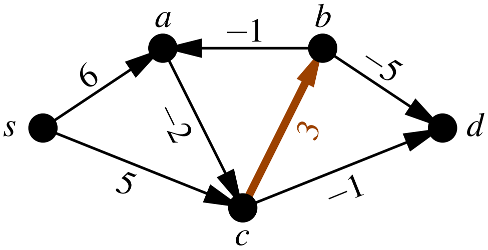
Bellman-Ford algoritmus



$$\min\{0+6, 8-1\} = 6$$

		$v \mapsto táv_k(v)$				$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	**0**	6	**8**	4	4	s	c	a	c
3	0	6				s			
4									

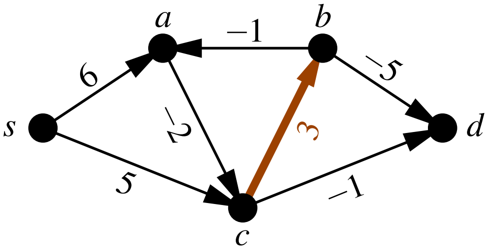
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{4+3\} = 7$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	**4**	4	s	c	a	c
3	0	6	8			s	c		
4									

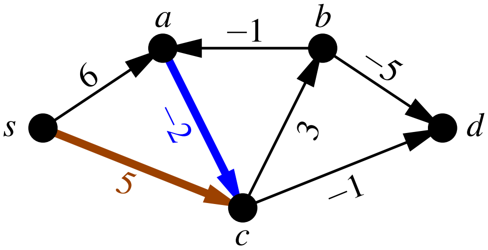
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{4+3\} = 7$

k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	7			s	c		
4									

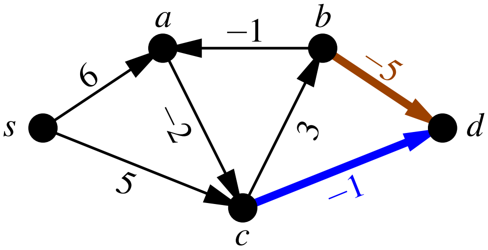
Bellman-Ford algoritmus



$$\min\{0+5, 6-2\} = 4$$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	**0**	**6**	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	7	4		s	c	a	
4									

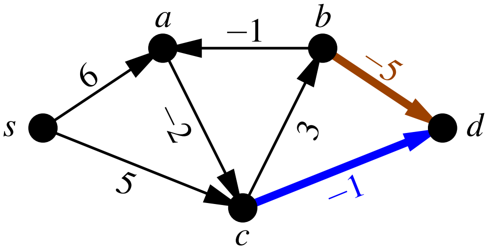
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{8 - 5, 4 - 1\} = 3$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	*s*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	*s*	$*$	*s*	$*$
2	0	6	**8**	**4**	4	*s*	*c*	*a*	*c*
3	0	6	7	4	4	*s*	*c*	*a*	*c*
4									

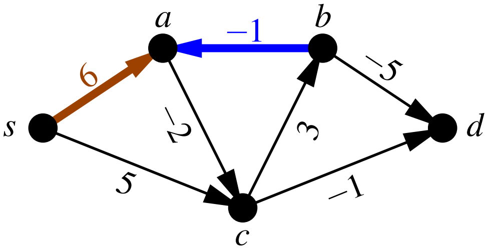
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{8-5, 4-1\} = 3$

k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	7	4	3	s	c	a	c
4									

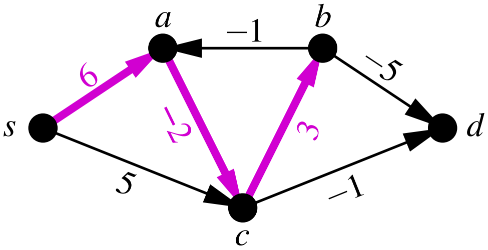
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{0+6, 7-1\} = 6$

		$v \mapsto táv_k(v)$				$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	**0**	6	**7**	4	3	s	c	a	c
4	0	6				s			

Bellman-Ford algoritmus

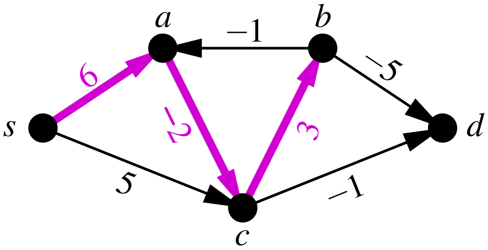


$t_3(b) = 7$

$t_4(a) = t_3(b) + w((b,a))$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	**0**	6	**7**	4	3	s	c	a	c
4	0	6				s			

Bellman-Ford algoritmus



$t_3(b) = 7$

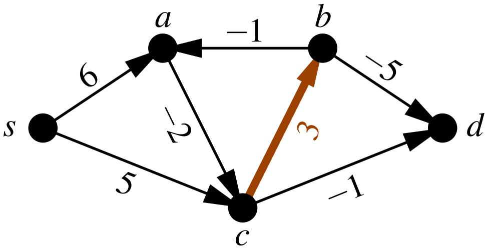
$t_4(a) = t_3(b) + w((b,a))$

Ez az út a $b \to a$ éllel nem megtoldható!

$\Longrightarrow$ *előző*$_4(a) = b$ hiba volna

k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
		$v \mapsto táv_k(v)$				$v \mapsto előző_k(v)$			
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	**0**	6	**7**	4	3	s	c	a	c
4	0	6				s			

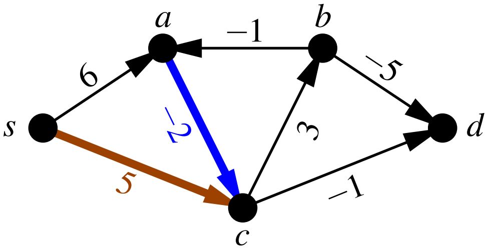
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{4+3\} = 7$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	7	**4**	3	s	c	a	c
4	0	6	7			s	c		

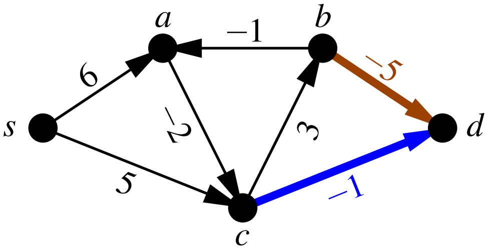
Bellman-Ford algoritmus



$$\min\{0+5, 6-2\} = 4$$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	**0**	**6**	7	4	3	s	c	a	c
4	0	6	7	4		s	c	a	

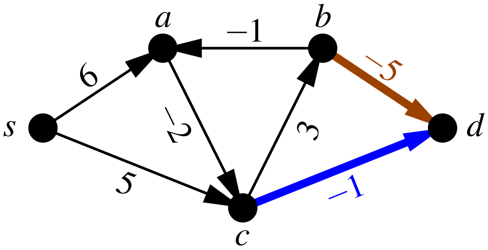
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{7 - 5, 4 - 1\} = 2$

k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	**7**	**4**	3	s	c	a	c
4	0	6	7	4	3	s	c	a	c

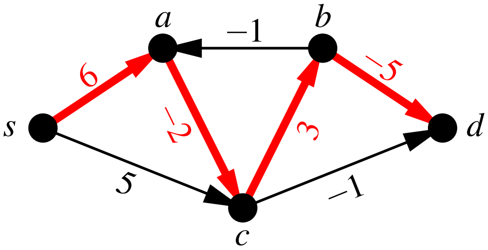
Bellman-Ford algoritmus



$\min\{7-5, 4-1\} = 2$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	7	4	3	s	c	a	c
4	0	6	7	4	2	s	c	a	b

Bellman-Ford algoritmus



Legrövidebb út
s-ből *d*-be:

$s \to a \to c \to b \to d$

	$v \mapsto táv_k(v)$					$v \mapsto előző_k(v)$			
k	s	a	b	c	d	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	6	∞	5	∞	s	$*$	s	$*$
2	0	6	8	4	4	s	c	a	c
3	0	6	7	4	3	s	c	a	c
4	0	6	7	4	**2**	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$