Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2024. november 26.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Legyen $V = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ vektorok generált altere.

a) Mutassuk meg, hogy $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis V-ben.

b) Létezik-e olyan $\underline{v} \in V$ vektor, amire $[\underline{v}]_B = \underline{a}$? Ha igen, adjuk meg $\underline{v}$-t. ($[\underline{v}]_B$ a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektorát jelöli.)

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},\ \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix},\ \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) A $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ rendszer lineárisan független, mert nem létezik olyan λ skalár, amivel az egyiküket megszorozva a másikat kapnánk. (Valóban: például $\lambda \underline{b}_1 = \underline{b}_2$ esetén az első három koordináta összehasonlításából $\lambda = 2$ adódna, ami viszont az utolsó koordinátákra nem működik.) (2 pont)
$\underline{b}_1, \underline{b}_2$ nyilván generátorrendszert alkot V-ben, mert $V = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$. (1 pont)
Így definíció szerint $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ valóban bázis V-ben. (1 pont)
b) A koordinátavektor definíciója szerint $[\underline{v}]_B = \underline{a}$ azt jelenti, hogy $\underline{v} = 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2$. (3 pont)
Ezt kiszámítva: $\underline{v} = (0, 0, 0, 1)^T$. Így erre a $\underline{v}$-re $[\underline{v}]_B = \underline{a}$ valóban igaz (és $\underline{v}$ az egyetlen ilyen). (3 pont)
Ha egy megoldás külön kitér arra is, hogy $2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 \in V$ valóban teljesül (az altér definíciójából következően), akkor ezért a meglátásért 1 pont adható – de persze csak akkor, ha ezzel a feladatra adott összpontszám nem haladja meg a 10-et.

2. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy az alábbi egyenletrendszer megoldható-e és ha igen, adjuk is meg az összes megoldását.

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 8x_3 + 5x_4 - 10x_5 &= 26 \\ 5x_1 - 2x_2 - 26x_3 + 2x_4 &= 13 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + p \cdot x_5 &= 0 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -8 & 5 & -10 & 26 \\ 5 & -2 & -26 & 2 & 0 & 13 \\ -3 & -3 & 3 & 6 & p & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 20 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & p & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 20 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & p & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & p & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+6 & 0 \end{array}\right) \sim$$ (2 pont)

Ha $p \neq -6$, akkor a negyedik sort $(p+6)$-tal osztva kapjuk a lépcsős alakot, majd az eliminációt a második fázissal folytatva (további két elemi sorekvivalens lépés után) a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ (1+1 pont)

Így a $p \neq -6$ esetben végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_1 = 3+4\alpha$, $x_2 = 5-3\alpha$, $x_4 = 4$ és $x_5 = 0$. (2 pont)

Ha viszont $p = -6$, akkor a negyedik sor csupa nulla sor, így ezt elhagyva kapjuk a lépcsős alakot, majd (további egy elemi sorekvivalens lépés után) a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$ (1+1 pont)

Így a $p = -6$ esetben is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ szabad paraméterek és $x_1 = 3 + 4\alpha$, $x_2 = 5 - 3\alpha + 2\beta$ és $x_4 = 4 + 2\beta$. (2 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Így például, ha egy elszámolás következtében az első 2 pontot (persze helyes számolás esetén) érő rész végén a negyedik sorban a jobb oldalon egy nemnulla érték jelenik meg és ezért a megoldó arra az (ez alapján helyes) következtetésre jut, hogy a $p = -6$ esetben nincs megoldás, az a pontozás szerinti utolsó $1 + 1 + 2$ pontból csak 1-et kaphat meg (az elsőt). Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Futtassuk a Gauss-eliminációnak a determináns kiszámítására szolgáló változatát a jobbra látható bemenetre és adjuk meg a determináns értékét. (A feladat tehát nem csupán a determináns értékének a kiszámítása, hanem a tanult algoritmus futtatása és annak dokumentálása.)

$$\begin{vmatrix} -2 & -6 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & -14 & -2 \\ 4 & 13 & 22 & -1 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Az algoritmust a tanultak szerint futtatva:

$$\begin{vmatrix} -2 & -6 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & -14 & -2 \\ 4 & 13 & 22 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$ (7 pont)

A kapott felsőháromszög-mátrix determinánsa (a főátlóbeli elemek szorzata, vagyis) -6. (2 pont)

Így az eredeti mátrix determinánsa (vagyis az algoritmus kimenete): -12. (1 pont)

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Ha egy megoldó nem pontosan követi a tanult algoritmust (például leosztás helyett az első két sor cseréjével kezdi a számolást), az – helyesen végigvitt számolást feltételezve is – ugyanilyen elvi hibának minősül, így (darabonként) 4 pont levonást jelent (hiszen a feladat az algoritmus végrehajtását kérte). A kifejtési tétel (vagy a determináns definíciójának) alkalmazása nem ér pontot (még hibátlan számolás esetén sem). Ha esetleg egy megoldó a kifejtési tétel alkalmazása után a kapott 3×3-as mátrixok determinánsát Gauss-eliminációval (vagy annak a lépéseivel) határozza meg (és ezáltal demonstrálja a feladat megoldásához szükséges ismeretek meglétének legalább egy részét), az – helyes számolást és eredményt feltételezve is – legföljebb 4 pontot kaphat.

4. Létezik-e a p valós paraméternek olyan értéke, amire a jobbra látható A mátrixnak van inverze és $A^{-1} = A$? Ha igen, adjuk meg p minden ilyen értékét.
$$A = \begin{pmatrix} p & 5 \\ -3 & -p \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. $A^{-1} = A$ az inverz mátrix definíciója szerint azt jelenti, hogy $A \cdot A = E$. (3 pont)

Elvégezve a mátrixszorzást: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} p^2-15 & 0 \\ 0 & p^2-15 \end{pmatrix}$. (3 pont)

Így $A^2 = E$ (vagyis $A^{-1} = A$) pontosan akkor teljesül, ha $p^2 - 15 = 1$, (3 pont)
azaz $p = 4$ vagy $p = -4$. (1 pont)

Második megoldás. A 2×2-es mátrixok determinánsáról tanultak szerint $\det A = 15 - p^2$. (1 pont)
Így a tanult tétel szerint A^{-1} pontosan akkor létezik, ha $15 - p^2 \neq 0$, vagyis ha $p \neq \pm\sqrt{15}$. (1 pont)
A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk ki, először a $p \neq 0$ esetben:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} p & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -p & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/p & 1/p & 0 \\ 0 & -p + 15/p & 3/p & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/p & 1/p & 0 \\ 0 & 1 & 3/15-p^2 & p/15-p^2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -p/15-p^2 & -5/15-p^2 \\ 0 & 1 & 3/15-p^2 & p/15-p^2 \end{array}\right)$$ (3 pont)

A tanultak szerint A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
Így az $A^{-1} = A$ feltételből sorra a $-p/15-p^2 = p$, $-5/15-p^2 = 5$, $3/15-p^2 = -3$, végül a $p/15-p^2 = -p$ egyenletek adódnak. (1 pont)
Ezeket rendezve (továbbra is a $p \neq 0$ feltétel mellett) mind a négy esetben a $p^2 = 16$ egyenletet kapjuk.
Így a $A^{-1} = A$ a $p = 4$ vagy $p = -4$ esetekben teljesül. (1 pont)
A $p = 0$ esetre külön elvégezve a számolást:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \end{array}\right)$$ (1 pont)

A és A^{-1} összevetéséből látható, hogy $p = 0$-ra $A^{-1} = A$ nem áll fenn, (1 pont)
így végül is $A^{-1} = A$ pontosan a $p = 4$ vagy $p = -4$ esetekben teljesül. (0 pont)
A fenti pontozás szerinti első $1+1$ pont megszerezhető úgy is, ha A^{-1} létezésének a feltételét az elimináció futtatásából nyeri a megoldó. (Sőt, $p \neq \pm\sqrt{15}$ konkrét kiszámítása helyett elegendő az elimináció megfelelő pontján azt mondani, hogy $-p + 15/p = 0$ esetén A^{-1} nem létezik, így ezzel az esettel nem kell foglalkozni.) Ha azonban egy megoldás az inverz létezésének a kérdésével egyáltalán nem foglalkozik, az az első $1+1$ pontot elveszíti. Hasonlóan, a pontozás szerinti utolsó $1+1$ pont megszerezhető úgy is, ha a megoldó a $p = 0$ eset külön tárgyalása helyett az inverz meghatározására szolgáló eliminációt a két sor cseréjével kezdi (akkor is, ha ezt minden külön indoklás nélkül teszi) és ezzel elkerüli az esetszétválasztást.

5. A 10×20-as A mátrix első tíz oszlopa által alkotott 10×10-es mátrixot jelölje A_1, az A utolsó tíz oszlopa által alkotott 10×10-es mátrixot pedig jelölje A_2. Tudjuk, hogy $\mathrm{r}(A_1) = 2$ és $\mathrm{r}(A_2) = 3$. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül: az állítás biztosan igaz; vagy az állítás biztosan hamis; vagy az állítás lehet igaz és hamis is (A választásától függően). (Döntéseinket természetesen indokoljuk.)

a) $\mathrm{r}(A) \geq 6$

b) $\mathrm{r}(A) \geq 4$

* * * * *

a) Az állítás (biztosan) hamis. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $\mathrm{r}(A) \geq 6$. (0 pont)
Ekkor (az oszloprang definíciója szerint) A oszlopai közül kiválaszthatunk 6 darabot úgy, hogy ezek lineárisan független rendszert alkotnak. (1 pont)

Mivel $6 > 2+3$, ezért a kiválasztott 6 oszlop közül vagy legalább 3 tartozik A_1 oszlopai közé, vagy legalább 4 tartozik A_2 oszlopai közé. (1 pont)

Mivel egy lineárisan független rendszer minden része is az, ezért mindkét esetben ellentmondásra jutunk: vagy azért, mert A_1 oszlopai közül kiválasztható legalább 3 lineárisan független (ellentmondásban azzal, hogy $\mathrm{r}(A_1) = 2$); vagy pedig azért, mert A_2 oszlopai közül kiválasztható legalább 4 lineárisan független (ellentmondásban azzal, hogy $\mathrm{r}(A_2) = 3$). (2 pont)

Ez az ellentmondás tehát bizonyítja, hogy $\mathrm{r}(A) \geq 6$ hamis. (0 pont)

b) Az állítás lehet igaz és hamis is. (0 pont)

Ennek megmutatásához először olyan példát mutatunk, amikor az állítás igaz. Legyen például A az a mátrix, aminek az első nyolc és utolsó hét oszlopát csupa 0-kkal töltjük ki, a 9-13. oszlopaiban pedig sorra az $\mathbb{R}^{10}$-beli standard bázis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_5$ vektorai állnak (vagyis a 10×10-es egységmátrix első 5 oszlopa).(0 pont)

Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathrm{r}(A_1) = 2$ és $\mathrm{r}(A_2) = 3$ valóban igaz, emellett $\mathrm{r}(A) = 5$. Ez mindhárom esetben belátható például úgy, hogy a mátrixoknak elhagyjuk a csupa nulla oszlopait, majd a kapott mátrixnak elhagyjuk a csupa nulla sorait. Ezek a lépések a tanultak szerint a rangot nem változtatják. (1 pont)

Mivel ezzel mindhárom esetben egy-egy egységmátrixot kapunk eredményül (sorra 2×2-es, 3×3-as, illetve 5×5-ös méretben), vagyis egy lépcsős alakú mátrixot, ezeknek a rangja valóban a soraiknak (avagy a vezéregyeseiknek) a száma (vagyis sorra 2, 3, illetve 5). (2 pont)

Most olyan példát mutatunk, amikor az állítás hamis. Ilyet nyerhetünk például az imént leírt mátrixból úgy, hogy annak a 11-13. oszlopaiban $\underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5 \in \mathbb{R}^{10}$ helyett az $\mathbb{R}^{10}$-beli standard bázis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ vektorait szerepeltetjük, de a mátrix összes többi oszlopát változatlanul hagyjuk. (0 pont)

Ekkor $\mathrm{r}(A_1) = 2$ és $\mathrm{r}(A_2) = 3$ az iméntivel azonos módon indokolható. (1 pont)

$\mathrm{r}(A)$ kiszámításához pedig ismét hagyjuk el a csupa nulla oszlopokat és a keletkező mátrix csupa nulla sorait. A kapott 3×5-ös mátrix ismét lépcsős alakú (aminek a vezéregyesei sorra az első, második, illetve az ötödik oszlopában vannak). Így a korábbiakhoz hasonlóan $\mathrm{r}(A) = 3$. (2 pont)

Természetesen számtalan más jó példa mutatható arra is, hogy $\mathrm{r}(A) \geq 4$ igaz és arra is, hogy nem az. Ezeknek a pontozása minden esetben úgy alakul, hogy a konkrét példák megadása önmagában nem ér pontot, a helyességüknek az indoklása pedig 3–3 pontot ér. Részpontszám csak akkor adható, ha a megoldó világossá tette a célkitűzését – vagyis hogy az állítás igaz vagy hamis voltára kíván példát mutatni – és a példája ennek a célkitűzésnek valóban megfelel. Így tehát nem adható részpontszám önmagában arra, ha a megoldó egy általa megadott 10×20-as A mátrixra meghatározza $\mathrm{r}(A_1)$, $\mathrm{r}(A_2)$ vagy $\mathrm{r}(A)$ értékét. (Ha viszont ilyen ellenőrzésekből csak utólag veszi észre, hogy sikerült példát mutatnia valamelyik esetre, az természetesen nem baj, a megfelelő részpontszám jár.)

6*. Jelölje $M \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ azt a 10×10-es mátrixot, aminek a mellékátlójában – vagyis a jobb felső sarkától a bal alsó sarkáig vezető átlójában – minden elem 2-es, M összes többi eleme pedig 1-es. Adjuk meg az összes olyan $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ mátrixot, amire $A \cdot A^T = M$.

* * * * *

A megoldást $\det M$ meghatározásával kezdjük:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \ldots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Itt először öt sorcserét végeztünk: az elsőt az utolsóval, a másodikat a 9-edikkel, stb. Ez minden alkalommal az ellentettjére változtatta a determinánst. Majd az első sort kivontuk a többi kilencből, végül az első oszlophoz hozzáadtuk a többi kilencet. Az utóbbi lépések a determináns értékét nem befolyásolták, így $\det M = -11$. (3 pont)

A determinánsok szorzástétele szerint $M = A \cdot A^T$-ból $\det M = \det A \cdot \det A^T$ következik. (1 pont)

Mivel egy szintén tanult tétel szerint $\det A = \det A^T$, (1 pont)

mindezekből $-11 = \det M = (\det A)^2$ adódik. (3 pont)

Ez nyilván ellentmondás (hiszen $\det A$ valós szám), így ilyen A mátrix nem létezik. (2 pont)