Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2023. december 1.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 24x_3 + (3p-1)\cdot x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 17x_2 + 22x_3 + (q-5p)\cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

* * * * *

Első megoldás. A feladatbeli lineáris egyenletrendszernek biztosan van megoldása a p és q minden értékére: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. (2 pont)
Ha egy lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, akkor (a tanult tétel szerint) ebben az egyenletek száma legalább annyi, mint az ismeretlenek száma. Így a feladatbeli egyenletrendszer biztosan nem egyértelműen megoldható (mivel három egyenletből áll és négy ismeretlen van benne). (3 pont)
Minden lineáris egyenletrendszerre igaz (a tanultak szerint), hogy vagy nincs megoldása, vagy egyértelműen megoldható, vagy végtelen sok megoldása van, (2 pont)
és a fentiek szerint az első két eset kizárt, így az egyenletrendszernek a p és q minden értékére végtelen sok megoldása van. (3 pont)

Második megoldás. A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & -4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -24 & 3p-1 & 0 \\ 3 & 17 & 22 & q-5p & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 3p+9 & 0 \\ 0 & 5 & 31 & q-5p+15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -p-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q+30 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ezzel elértük a lépcsős alakot, majd az algoritmus végrehajtását a második fázissal folytatjuk a redukált lépcsős alakig: (0 pont)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & 3q+85 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p-6q-183 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q+30 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4p+27q+817 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p-6q-183 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q+30 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

A kapott redukált lépcsős alak szerint $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_1 = (-4p - 27q - 817)\cdot\alpha$, $x_2 = (p + 6q + 183)\cdot\alpha$ és $x_3 = (-q - 30)\cdot\alpha$. (3 pont)
Így p és q minden értékére végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek. (3 pont)

Ha egy megoldó akár a lépcsős alak, akár a redukált lépcsős alak elérése után abbahagyja a számolást és úgy érvel, hogy mivel tilos sor nem keletkezett az első fázis végén, viszont a negyedik oszlopban nincs vezéregyes és így x_4 szabad paraméter, ezért mindenképp végtelen sok megoldás lesz, az természetesen teljes értékű megoldás és így maximális pontszámot ér. A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. A redukált lépcsős alak helytelen értelmezése viszont elvi hibának számít, ilyen esetben a pontozás szerinti utolsó 3+3 pont elveszik. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 1-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

2. Legyen $\pi = (5, 2, 6, 1, 4, 3)$ (vagyis π az $1, 2, \ldots, 6$ számoknak az a permutációja, amire $\pi_1 = 5$, $\pi_2 = 2$, $\ldots$, $\pi_6 = 3$). A 6×6-os A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \geq \pi_i, \\ 0, & \text{ha } j < \pi_i \end{cases}$$

minden $1 \leq i, j \leq 6$ esetén (vagyis minden i-re az i-edik sorban a π_i-edik helyen és attól jobbra mindenhol 1-es áll, a π_i-edik helytől balra pedig 0). Számítsuk ki $\det A$ értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg $\det A$ értékét.)

* * * * *

A definíció szerint összeadandóként szereplő szorzatok közül nem kell figyelembe venni azokat, amik tartalmaznak 0 tényezőt, mert ezek értéke 0, így 0-val járulnak hozzá a determináns értékéhez. (1 pont)
Egy 0-t nem tartalmazó szorzatban a 3. sorból csak a 6. helyen álló 1-es választható, mert $\pi_3 = 6$ miatt a sor első 5 eleme 0. (1 pont)
Ezért az 1. sorból már csak az 5. helyen álló 1-es választható, mert $\pi_1 = 5$ miatt a sor első 4 eleme 0 és a 6. oszlopból már választottunk elemet. (1 pont)
Hasonlóan: az 5. sorból csak a 4. helyen álló 1-es választható, mert $\pi_5 = 4$ miatt a sor első 3 eleme 0 és az utolsó két oszlopból már választottunk elemet. Így folytatva végül azt kapjuk, hogy az egyetlen nemnulla szorzat épp a π permutációnak megfelelő szorzat. (2 pont)
Ennek a szorzatnak az értéke nyilván $1^6 = 1$, (1 pont)
az előjeléhez pedig meghatározzuk π inverziószámát: $I(\pi) = 4 + 1 + 3 + 0 + 1 + 0 = 9$ (ahol az elemekhez sorra a tőle jobbra álló, nála kisebb elemek száma szerepel összeadandóként). (1 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, a π-hez tartozó szorzat negatív előjelet kap. (1 pont)
Így definíció szerint $\det A = -1$ (mert a $6! = 720$ összeadandó közül az egyik (-1), a többi 0). (2 pont)
Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba, figyelmetlenség 1 pont levonást jelent. A determináns definíciója ismeretének (akár részleges) hiányára utaló elvi hibák azonban darabonként 4 pont levonást jelentenek.

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 6 & 17 & 19 & 23 \\ 12 & -9 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Vonjuk ki a harmadik oszlopot a negyedikből és az ötödikből. Ezek a lépések (a tanultak szerint) a determináns értékét nem változtatják. (4 pont)
Ezzel a negyedik oszlop $(0, 2, 0, 0, 0)^T$, az ötödik $(0, 6, 0, 0, 0)^T$ lett. (1 pont)
Most vonjuk ki a negyedik oszlop háromszorosát az ötödik oszlopból. A determináns értékét ez a lépés sem változtatja. (2 pont)
Ezzel az ötödik oszlop csupa nullává változott. (1 pont)
A csupa nulla oszlop miatt (a tanultak szerint) a determinás értéke 0 (és így ugyanez igaz az eredeti determinánsra is). (2 pont)

Második megoldás. Vonjuk ki az első sort a harmadikból, a negyedikből és az ötödikből. Ezek a lépések (a tanultak szerint) a determináns értékét nem változtatják. (3 pont)
A kapott mátrixban a jobb alsó, háromszor hármas részmátrix minden eleme 0. (1 pont)
Ha most ennek a mátrixnak a determinánsát a definíció szerint számítjuk ki, akkor mindegyik bástyaelhelyezéshez tartozó szorzat tartalmaz 0 elemet. Valóban: ha az utolsó három sorból nemnulla elemet akarunk választani, akkor ezt csak az első két oszlopból tehetjük meg; mivel azonban minden oszlopból csak egy elemet lehet választani, ez lehetetlen. (3 pont)
Így a definíció szerinti kiszámításkor $5! = 120$ darab előjelezett 0-t adunk össze. Ezért a determináns értéke 0 (és ugyanez igaz az eredeti determinánsra is). (3 pont)

Harmadik megoldás. A Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatát alkalmazzuk:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 6 & 17 & 19 & 23 \\ 12 & -9 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 19 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1/4 & 9/4 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 9/4 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 19 & 21 & 25 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 19 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & -31 & -31 & -31 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) nem ér pontot, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

4. a) A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak, és p-nek azokra az értékeire, amikre A^{-1} létezik, adjuk is meg azt.

b) Azokra a p-kre, amikre A^{-1} létezik, határozzuk meg az $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A) + (A - E)^2$ mátrixot.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2p & p+1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) $\det A = 2 \cdot (p+1) - 2p = 2$ (a 2×2-es determináns kiszámításáról tanultak szerint). (1 pont)
Mivel $\det A \neq 0$ igaz minden p-re, ezért (a tanult tétel szerint) A^{-1} létezik a p minden értékére. (1 pont)
A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2p & p+1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -p & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & p+1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -p & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

A tanultak szerint A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
A tanultak szerint A^{-1} létezése mellett úgy is érvelhetünk (illetve a fenti pontozás szerinti első 1+1 pontot úgy is megszerezhetjük), hogy mivel a Gauss-elimináció során a vonaltól balra a p minden értékére egységmátrix keletkezett, ezért A^{-1} létezik a p minden értékére. A megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hibák 1 pont levonást jelentenek, de az A^{-1} számítására vonatkozó alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pontot.

b) $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A) = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot A - E \cdot A^2 + E \cdot A = E \cdot A - E - A^2 + A = -A^2 + 2A - E$. (2 pont)
$(A - E)^2 = (A - E) \cdot (A - E) = A \cdot A - A \cdot E - E \cdot A + E^2 = A^2 - A - A + E = A^2 - 2A + E$. (2 pont)
Így $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A) + (A - E)^2 = -A^2 + 2A - E + A^2 - 2A + E = 0$, vagyis az eredmény a nullmátrix. (1 pont)
(A fenti számításokhoz a mátrixokon végzett műveletek tanult tulajdonságait használtuk: disztributivitás, asszociativitás, a skalár szorzó kiemelhetősége és az E-vel végzett szorzás tulajdonsága.) (0 pont)

A b) feladat természetesen megoldható az egyes tényezők közvetlen kiszámításával is:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2p+4 & p+3 \\ 2p^2+6p & p^2+4p+1 \end{pmatrix}, A^2 - A = \begin{pmatrix} 2p+2 & p+2 \\ 2p^2+4p & p^2+3p \end{pmatrix}, (A-E)^2 = \begin{pmatrix} 2p+1 & p+1 \\ 2p^2+2p & p^2+2p \end{pmatrix}$$

és $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A)$ az utóbbi mátrix ellentettje. Ha valaki így dolgozik, akkor a fenti három mátrix kiszámítása 1-1 pontot ér és az $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A)$ szorzat, valamint ezekből a végeredmény kiszámítása további 1-1 pontot. ($A^{-1} - E$ kiszámítása önmagában nem ér pontot.) A megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hibák 1-1 pont levonást jelentenek, de az A^{-1} számítására vagy a mátrixszorzás elvégzésére vonatkozó alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pontot.

5. Legföljebb hányat lehet kiválasztani az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok közül úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \underline{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A keresett érték az öt felsorolt vektor egyesítésével keletkező 4×5-ös mátrix rangja (az oszloprang definíciója szerint). (4 pont)

A rangot a tanultak szerint Gauss-eliminációval határozzuk meg:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} -2 & -14 & 2 & 4 & 10 \\ 3 & 21 & -3 & -6 & -11 \\ 2 & 15 & -1 & -1 & -11 \\ -1 & -2 & 6 & 17 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 15 & -8 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 15 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(3 pont)}$$

A kapott mátrix lépcsős alakú, így a rangja a sorainak (avagy a vezéregyeseinek) a száma: 3. (3 pont)

Így a felsorolt öt vektor közül legföljebb 3-at lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek. (0 pont)

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. (A pontozás szerinti utolsó 3 pont természetesen megadható akkor, ha egy hibás számolás eredményeképpen kapott lépcsős alakú mátrix rangját valaki helyesen állapítja meg.) Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó nem közvetlenül a Gauss-eliminációt alkalmazza (vagyis nem annak a pontos követésével jut el egy lépcsős alakig), akkor indokolnia kell a megoldás helyességét – vagyis hivatkoznia kell arra, hogy a megtett lépések a tanultak szerint a rangot nem változtatják; ennek híján az utolsó 3 pontot nem szerezheti meg.

6*. Az $n \times n$-es A mátrixra $A + A^2 + A^3 = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$ vagy $\det A = 1$.

* * * * *

Ha $\det A = 0$, akkor ez megfelel a feladat állításának. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $\det A \neq 0$ (és célunk megmutatni, hogy $\det A = 1$). (1 pont)

Mivel $\det A \neq 0$, ezért A-nak létezik inverze. (1 pont)

Szorozzuk meg (balról) az $A + A^2 + A^3 = 0$ egyenletet A^{-1}-zel: $A^{-1} \cdot (A + A^2 + A^3) = A^{-1} \cdot 0$. (1 pont)

A jobb oldalon nyilván 0-t kapunk (mert a nullmátrixot bármivel szorozva az eredmény szintén 0).(1 pont)

A bal oldalon a zárójel felbontása után $A^{-1} \cdot A = E$ (és az E-vel való szorzás tulajdonsága) miatt kapjuk: $E + A + A^2 = 0$. (1 pont)

(Itt a felsoroltakon kívül használtuk a mátrixszorzás disztributivitását és asszociativitását is.) (0 pont)

Ebből $A^2 + A = -E$. Ezt az $A + A^2 + A^3 = 0$ egyenletbe helyettesítve: $A^3 - E = 0$, vagyis $A^3 = E$.(2 pont)

A determinánsok szorzástételét (kétszer) alkalmazva: $\det A^3 = (\det A)^3$. (1 pont)

Így $A^3 = E$ és $\det E = 1$ miatt $(\det A)^3 = 1$, amiből $\det A = 1$ valóban következik. (2 pont)