Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2021. december 2.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi nem befolyásolja a determináns értékét. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban a második oszlopból csak a 2-es választható. Ezért a negyedik oszlopból már csak az 1-es választható (hiszen az első sorból már vettünk elemet), így a harmadik oszlopból csak a 2-es.(1 pont)
Eddig az első és ötödik oszlopból, illetve a második és negyedik sorból nem választottunk elemet, így kétféleképp fejezhető be a 0-t nem tartalmazó bástyaelhelyezés kiválasztása: az első és az ötödik oszlopból is az 5-öst választva, vagy az elsőből a 3-ast és az ötödikből a 8-ast. (1 pont)
Így két darab, nullát nem tartalmazó szorzat van: $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2$, illetve $2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2$. (1 pont)
Az elsőhöz tartozó π permutáció a $2, 1, 4, 5, 3$ (mert az első sorból a második elemet vettük ki, a másodikból az elsőt, stb). (1 pont)
π inverziószáma $I(\pi) = 3$ (az inverzióban álló elempárok $(2, 1)$, $(4, 3)$ és $(5, 3)$). (1 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, az első szorzat negatív előjelet kap. (1 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció a $2, 5, 4, 1, 3$, ennek az inverziószáma 6, így a szorzat előjele pozitív. (1 pont)
Végül is tehát a determináns értéke $-2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 = 4$. (2 pont)
Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba, figyelmetlenség 1 pont levonást jelent. Ha azonban egy megoldásban a determináns definíciója ismeretének (akár részleges) hiányára utaló elvi hiba van, akkor arra legföljebb 3 pont adható (az is csak akkor, ha egyébként a megoldás értékes lépéseket is tartalmaz).

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Jelölje a feladatban szereplő mátrixot A. Látható, hogy $A^T = -A$ (mert minden $1 \leq i, j \leq 5$ esetén $a_{i,j} = -a_{j,i}$). (1 pont)
A tanult tétel szerint $\det A = \det A^T$, amiből tehát $\det A = \det(-A)$ következik. (3 pont)
Másrészt $\det(-A) = -\det A$, mert a $(-A)$ mátrixot megkaphatjuk A-ból úgy, hogy A-nak mind az öt sorát (-1)-gyel szorozzuk és a tanultak szerint minden ilyen lépés ellentettjére változtatja a determináns értékét (vagyis $\det(-A) = (-1)^5 \cdot \det A$). (3 pont)
A fentieket összevetve $\det A = -\det A$ adódik, amiből tehát $\det A = 0$. (3 pont)

Második megoldás. A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 0 & -8 & -9 \\ 3 & -6 & 8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -10 & -20 & -23 \\ 0 & -6 & -7 & -18 & -11 \\ 0 & -7 & -11 & -34 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39/5 \end{vmatrix} = (-5)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5)^2 \cdot 0 = 0 \qquad \text{(10 pont)}$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) nem ér pontot, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

3. Jelölje A és B az alábbi mátrixokat és legyen $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$. Határozzuk meg az A^{100} és C^{100} mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy B^{-1} valóban létezik. Egy M mátrixra M^{100} azt a 100 tényezős szorzatot jelöli, aminek minden tényezője M.)

* * * * *

Első megoldás. A mátrixszorzás definíciója szerint A^2-et kiszámítva kapjuk, hogy $A^2 = E$. (3 pont)
Ebből $A^{100} = (A^2)^{50} = E^{50} = E$ adódik (az $E \cdot E = E$ összefüggés ismételt alkalmazásával). (2 pont)
$C^2 = B^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot A \cdot E \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot A^2 \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E$, ahol felhasználtuk az inverz definíciójából adódó $B \cdot B^{-1} = E$ és $B^{-1} \cdot B = E$ összefüggéseket és a fentebb kapott $A^2 = E$ egyenlőséget (valamint az egységmátrix fentebb már használt tulajdonságát). (4 pont)
Ebből a fentivel azonos módon következik, hogy $C^{100} = E$ is igaz. (1 pont)
A fenti megoldásban felhasználtuk az $(A^k)^n = A^{k \cdot n}$ azonosságot, valamint (C^2 meghatározásakor) azt is, hogy a mátrixszorzás asszociativitása háromnál több tagú szorzatokra is érvényes; ezek indoklásának (illetve megemlítésének) a hiányáért azonban nem vonunk le pontot. Az $A^2 = E$ összefüggésből $A^{100} = E$ indokolható úgy is, hogy A hatványai felváltva A-val, illetve E-vel egyenlők; ha ezt egy megoldó minden további indoklás nélkül kijelenti, akkor ezért a fenti pontozás szerinti, másodiknak írt 2 pontból 1-et megkaphat (és a másik 1 pont az indoklásért jár).

Második megoldás. A^{100} meghatározása, illetve az ezért járó pontszámok azonosak a fentivel. (3+2 pont)
Meghatározzuk B^{-1}-et a Gauss-elimináció megfelelő, tanult változatával:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

B^{-1} tehát a fenti, a vonaltól jobbra álló 3×3-as mátrix. (2 pont)
Ebből a mátrixszorzás definícióját alkalmazva kapjuk a $C = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. (1 pont)
C-t négyzetre emelve adódik, hogy $C^2 = E$. (1 pont)
Ebből a fentivel azonos módon következik, hogy $C^{100} = E$ is igaz. (1 pont)

4. A 10×10-es A mátrix bal felső eleme 2, a főátlójának a többi eleme 1, a mátrix összes többi (vagyis nem a főátlóban lévő) eleme pedig szintén 2. (Így tehát A-nak összesen 9 darab 1-es és 91 darab 2-es eleme van.) Döntsük el, hogy A-nak létezik-e inverze és ha igen, akkor számítsuk ki.

* * * * *

A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -17/2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}\right) \quad \text{(6 pont)}$$

A vonaltól balra egységmátrix keletkezett (és így $\det A \neq 0$), ezért A-nak létezik inverze (3 pont)
és az a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
Az inverz létezését indokolhatjuk úgy is, hogy külön kiszámítjuk A determinánsát és mivel az nem 0 ($\det A = -2$), ezért a tanultak szerint A^{-1} létezik. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó A^{-1} számolása közben egyszerű számolási hibát vét, de a végén a számolását beszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy hibázott, az ezért 1 pontot visszakaphat a számolási hibákért levont pontok közül még akkor is, ha a hibát kijavítani nem tudja.

5. A p valós paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

A rangot a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & -15 & 6 \\ 0 & -2 & p-12 & 2p \\ 0 & 3 & 15 & p-8 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & p-2 & 2p-4 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{pmatrix} \quad \text{(3 pont)}$$

Ha most $p = 2$, akkor az utolsó két sor csupa nulla sor, így ezek elhagyhatók. (1 pont)
Ebben az esetben a megmaradó, két sorú mátrix lépcsős alakú, így a tanultak szerint a rangja (és vele együtt az eredeti mátrixé is) 2. (2 pont)
A $p \neq 2$ esetben viszont a lépcsős alakot az utolsó két sor $(p-2)$-vel való osztásával kapjuk:

$$= \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(2 pont)}$$

Így ilyenkor a rang értéke (a lépcsős alak sorainak – másképpen vezéregyeseinek – száma, azaz) 4.(2 pont)
Összefoglalva: ha $p = 2$, akkor a mátrix rangja 2, ha viszont $p \neq 2$, akkor a mátrix rangja 4. (0 pont)
Ha egy megoldó a rang definícióját használva csak annyit állapít meg, hogy a rang értéke p minden értékére legalább 2, mert az első két oszlop lineárisan független (hiszen egyik sem skalárszorosa a másiknak), akkor ezért 1 pontot kaphat. (Az a megállapítás viszont nem ér pontot, hogy a rang értéke legföljebb a sorok és oszlopok száma, vagyis 4.) Ha egy megoldó kiszámítja a mátrix determinánsát (ami $-15(p-2)^2$), és ebből a determinánsrang definícióját használva megállapítja, hogy $p \neq 2$ esetén a rang értéke 4, akkor ezért összesen 4 pontot kaphat.

6*. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy van olyan megoldása, amiben a változók összege 2020, de olyan megoldása már nincs, amiben a változók összege 2021. Eldönthető-e ennyi információ alapján, hogy ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek van-e olyan megoldása, amiben a változók összege 2022?

* * * * *

Első megoldás. Megmutatjuk, hogy igen, eldönthető: nincs ilyen megoldás. Legyen ugyanis $\underline{x}_0$ olyan megoldása az egyenletrendszernek, amiben a változók összege 2020 és tegyük fel indirekt, hogy létezik egy olyan $\underline{x}_2$ megoldás is, amiben a változók összege 2022. (0 pont)
Ekkor ha $(A|\underline{b})$ jelöli a szóban forgó lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixát, akkor a tanultak szerint $A \cdot \underline{x}_0 = \underline{b}$ és $A \cdot \underline{x}_2 = \underline{b}$ teljesül. (2 pont)
Legyen $\underline{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_0 + \underline{x}_2)$. Megmutatjuk, hogy $\underline{x}_1$ is megoldása az egyenletrendszernek. Valóban, a mátrixszorzás tanult azonosságait használva

$$A \cdot \underline{x}_1 = A \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot (\underline{x}_0 + \underline{x}_2)\right) = \tfrac{1}{2} \cdot (A \cdot \underline{x}_0 + A \cdot \underline{x}_2) = \tfrac{1}{2} \cdot (\underline{b} + \underline{b}) = \underline{b},$$

vagyis $\underline{x}_1$ valóban megoldás. (4 pont)
Másrészt $\underline{x}_1$ koordinátáinak az összege 2021, mert $\underline{x}_0 + \underline{x}_2$ koordinátáinak az összege $2020 + 2022 = 4042$, így $\frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_0 + \underline{x}_2)$ koordinátáinak az összege ennek a fele. (3 pont)
Ezzel ellentmondásra jutottunk: mégis létezik az egyenletrendszernek olyan megoldása, amiben a változók összege 2021. Ez az ellentmondás tehát valóban bizonyítja, hogy nem létezhet olyan megoldás, amiben a változók összege 2022. (1 pont)

Második megoldás. Megmutatjuk, hogy igen, eldönthető: nincs ilyen megoldás. Ehhez futassuk le képzeletben a Gauss-eliminációt a szóban forgó lineáris egyenletrendszerre. (0 pont)
Mivel a rendszer megoldható (ez a feladat feltételeiből következik), ezért az eljárás redukált lépcsős alakkal ér véget (vagyis nem keletkezik az első fázis végén tilos sor). (1 pont)
Ha az egyenletrendszernek csak egy megoldása van (vagyis a redukált lépcsős alakban a vonaltól balra minden oszlopban van vezéregyes), akkor nyilván a változók összege is csak egyféle lehet; vagyis ebben az esetben az összeg valóban nem lehet 2022 (csak 2020). (1 pont)
Ha viszont az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (vagyis a redukált lépcsős alakban a vonaltól balra nem minden oszlopban van vezéregyes), akkor a változók egy része szabad paraméter (azok, amiknek az oszlopában nincs vezéregyes). Jelölje azokat a változókat, amiknek az oszlopában van vezéregyes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ a többit (vagyis a szabad paramétereket) $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. (0 pont)
Ekkor a szabad paraméterek minden $x_j = \alpha_j \in \mathbb{R}$ $(k+1 \leq j \leq n)$ megválasztása esetén a többi változó kifejezhető $x_i = b_i - c_{i,k+1}\alpha_{k+1} - \ldots - c_{i,n}\alpha_n$ alakban minden $1 \leq i \leq k$ esetén, ahol $c_{i,j}$ a redukált lépcsős alakban az x_i vezéregyesét tartalmazó sor és az x_j-nek megfelelő oszlop kereszteződésében álló érték, b_i pedig ugyanebben a sorban a vonaltól jobbra álló elem. (1 pont)
Az egyenletrendszernek ebben a megoldásában tehát a változók összege $x_1 + \ldots + x_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n = B + C_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + C_n\alpha_n$, ahol $B = b_1 + \ldots + b_i$ és $C_k = 1 - c_{1,j} - c_{2,j} - \ldots - c_{k,j}$ minden $k+1 \leq j \leq n$ esetén. (1 pont)
Azt állítjuk, hogy $C_{k+1} = \ldots = C_n = 0$. Valóban, ha valamely $k+1 \leq t \leq n$ esetén $C_t \neq 0$ volna, akkor a $B + C_t\alpha_t = 2021$ egyenlet megoldható lenne az $\alpha_t = \frac{2021-B}{C_t}$ választással, így α_t-nek ezt az értéket adva, minden $j \neq t$, $k+1 \leq j \leq n$ esetén pedig az $\alpha_j = 0$ értékadással a lineáris egyenletrendszernek olyan megoldását kapnánk, amiben a változók összege 2021. A feladat szövege szerint ez lehetetlen. (4 pont)
Következik, hogy a változók összege $x_1 + \ldots + x_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n = B$ az egyenletrendszer minden megoldására. Mive a feladat szövegéből következően $B = 2020$, ezért valóban nincs olyan megoldás, amiben a változók összege 2022. (2 pont)

Harmadik megoldás. A feladat feltétele azt állítja, hogy ha a szóban forgó lineáris egyenletrendszert kiegészítjük az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ egyenlettel, akkor a $p = 2020$ esetben megoldható rendszert kapunk, a $p = 2021$ esetben viszont nem megoldható rendszert. (Itt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelölik az egyenletrendszer változóit, p pedig egy paraméter.) (2 pont)
Jelölje $(A|\underline{b}_p)$ ennek, az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ egyenlettel már kiegészített lineáris egyenletrendszernek a kibővített együtthatómátrixát. Ezt tehát az eredeti egyenletrendszer $(A_0|\underline{c})$ kibővített együtthatómátrixából úgy kapjuk, hogy A_0-hoz hozzáveszünk egy csupa 1-eseket tartalmazó sort, $\underline{c}$-hez pedig egy új koordinátát, aminek az értéke a p paraméter. (0 pont)
Futassuk képzeletben $(A|\underline{b}_p)$-re a Gauss-eliminációt úgy, hogy p-vel, mint paraméterrel számolunk. (0 pont)
Megmutatjuk, hogy az elimináció során végig a vonaltól jobbra álló oszlop minden pozíciójában p-nek egy lineáris függvénye, vagyis egy $u \cdot p + v$ alakú kifejezés áll, ahol $u, v \in \mathbb{R}$. Valóban, kezdetben ez igaz: a $\underline{b}_p$ vektor egyik koordinátája $p = 1 \cdot p + 0$, a többi pedig $0 \cdot p + c_i$ alakú. Ha pedig egy ponton ez a tulajdonság fennáll, akkor a Gauss-elimináció ezt nem rontja el, hiszen $u \cdot p + v$ alakú kifejezések összege és skalárszorosa is ilyen alakú. (2 pont)
Mivel az egyenletrendszer $p = 2021$ esetén nem megoldható, ezért a $p = 2021$ paraméterválasztással az elimináció során tilos sor keletkezik. Ebben a sorban tehát a vonaltól balra csupa nulla, a vonaltól jobbra pedig $u_0 \cdot p + v_0$ áll és az u_0, v_0 együtthatókra $u_0 \cdot 2021 + v_0 \neq 0$. (1 pont)
Másrészt $u_0 \cdot 2020 + v_0 = 0$, különben a Gauss-elimináció ugyanezen a ponton a $p = 2020$ paraméter érték esetén is tilos sort hozna létre, így az egyenletrendszer nem volna megoldható – szemben a feladat szövegével. (2 pont)
Az $u_0 \cdot 2020 + v_0 = 0$ és $u_0 \cdot 2021 + v_0 \neq 0$ összefüggésekből nyilván $u_0 \neq 0$ és így $u_0 \cdot 2022 + v_0 = 2u_0 \neq 0$ is adódik. (1 pont)
Következik, hogy a Gauss-elimináció ugyanezen a ponton a $p = 2022$ választással is tilos sort hoz létre, így az egyenletrendszer $p = 2022$ esetén sem megoldható (vagyis a kérdés eldönthető). (2 pont)