Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok, MÁSODIK pótzh — pontozási útmutató
2017. december 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Minden feladat 10 pontot ér. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér. A megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hibákért általában (vagyis ha nincs másképp jelezve) 1 pontot vonjunk le, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló elírásokért (vagyis amikor a hallgató nyilvánvalóan nem azt írta le, amit szeretett volna, pl. feladat adatainak másolásakor, saját részeredményének másolásakor) nem muszáj pontot levonni. Fontos, hogy győződjünk meg róla, hogy valóban számolási hibáról, illetve elírásról van szó, mivel az elvi hibákért ennél sokkal több pontot kell levonni. Ha egy számolási hiba vagy elírás a megoldás menetét érdemben befolyásolja, akkor csak azokat a részpontokat kaphatja meg a hallgató, amik a feladat eredeti formájának megoldásához is hozzájárulnak.

1. Legyen V azon altere $\mathbb{R}^4$-nek, melyet azok a vektorok alkotnak, melyek x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátáira teljesül, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$. Adjunk meg V-ben egy olyan bázist, mely tartalmazza a jobbra látható $\underline{v}$ vektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az előadáson tanult eljárást követjük: egy független rendszert bővítünk egyesével, amíg bázist nem kapunk. A kezdeti független rendszer az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorból áll, ehhez kell egy további vektort úgy, hogy együtt is függetlenek legyenek. (1 pont)

Erre alkalmas pl. a $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor, hiszen ez nem skalárszorosa $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$-nak (ez pedig a tanult eljárás vagy az újonnan érkező vektor lemmája szerint elegendő). (2 pont)

A kapott független rendszert a következő lépésben bővíthetjük pl. az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, hiszen az nem állhat elő az első két vektor lineáris kombinációjaként (ez ismét a tanult eljárás vagy az újonnan érkező vektor lemmája szerint elegendő), mivel a negyedik koordinátája 1, míg a másik két vektor negyedik koordinátája 0. (2 pont)

Azt állítjuk, hogy a kapott rendszer a kérdéses altér bázisa lesz. Egy 3 dimenziós altérben 3 független vektor a tanultak szerint bázist alkot, ezért elég belátni, hogy a kérdéses altér valóban 3 dimenziós. (1 pont)

Az altér az F-G egyenlőtlenség miatt 3-nál kevesebb dimenziós nem lehet, mivel van benne 3 független vektor, (2 pont)

4 dimenziós pedig nem lehet, mivel ekkor maga $\mathbb{R}^4$ lenne (hiszen 4 darab $\mathbb{R}^4$-beli független vektor a tanultak szerint $\mathbb{R}^4$ bázisa lenne), ami nyilván nem áll fenn (hiszen $\mathbb{R}^4$ nem minden vektorára teljesül, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$). (2 pont)

Szigorúan véve azt is be kéne látni, hogy az altér nem 5 vagy több dimenziós, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot. A három vektor megadása után folytathatjuk a megoldást a következőképp is (a megoldás eddigi menete alapján azt már tudjuk, hogy a vektorok függetlenek).

Ahhoz, hogy a megadott vektorok bázist alkossanak, azt kell még belátnunk, hogy generálnak minden olyan vektort, ami az altérben van. (1 pont)

Legyen $\underline{x}$ ilyen vektor és legyenek a koordinátái x_1, x_2, x_3, x_4. Azt kell megmutatnunk, hogy léteznek a, b, c skalárok, melyekre

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(1 pont)

Vagyis az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right)$$

egyenletrendszerről kell belátnunk, hogy létezik megoldása (az a, b, c változókra). (1 pont)

A második és a negyedik sor (egyenlet) alapján $a = x_2, c = x_4$, most a harmadik sor alapján $b = x_3 - a = x_3 - x_2$ és az így kapott a, b, c értékek nem csak a második, a negyedik és a harmadik egyenletet elégítik ki, hanem az elsőt is: $a + 3b + c = x_2 + 3(x_3 - x_2) + x_4 = -2x_2 + 3x_3 + x_4 = x_1$, hiszen tudjuk, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$. (2 pont)

2. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét minden p valós szám esetén.
$$\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$$

* * * * *

Jelöljük a keresett determináns értékét D-vel. A kifejtési tételt az első oszlopra alkalmazva: $D = p \cdot \begin{vmatrix} p & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & p & p \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & p & p \end{vmatrix}$ (3 pont)

(Itt a 0-val szorzott tagokat már elhagytuk.) Az első, p-vel szorzott determináns két oszlopa azonos, így az értéke 0 (hiszen az egyikből a másik sort kivonva csupa 0 oszlopot kapnánk). (2 pont)

A második, (-1)-gyel szorzott determináns második sorának p-szeresét kivonjuk a harmadik sorából (ez az értékét nem változtatja meg), (2 pont)

majd ismét a kifejtési tételt alkalmazzuk, az utolsó sora szerint:

$$D = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3-p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3-p) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (2 pont)

Innen a 2×2-es determinánsok kiszámítására vonatkozó ismert szabállyal fejezhetjük be a megoldást: $D = -(3-p)(-4) = 12 - 4p$. (1 pont)

Természetesen a determináns értéke sok más úton is megkapható, a leggyorsabban úgy, hogy a 4. oszlopból a 3.-at levonjuk, majd a 4. oszlop szerint fejtjük ki a determinánst. Alkalmazható a Gauss-elimináció is, de paramétert tartalmazó kifejezéssel leosztva külön kell kezelni azt az esetet, amikor annak az értéke 0, illetve 0-tól különböző. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyenek például: a kifejtési tételben a sakktáblaszabályból származó előjel elhagyása, vagy helytelen megállapítása (kivéve, ha teljes biztonsággal meggyőződtünk róla, hogy elírásról (0 pont levonás), illetve számolási hibáról (1 pont levonás) van szó); paramétert tartalmazó kifejezéssel való osztás a szükséges esetvizsgálat nélkül; egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után a determináns értékváltozásának figyelmen kívül hagyása vagy hibás követése. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni.

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+12)\cdot x_3 + (p+5)\cdot x_4 &= 10 \end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p & p+1 & 0 \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)
Ha $p \neq 0$, akkor a harmadik sort p-vel osztva folytatjuk az eliminációt, (1 pont)
melynek végén az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-\frac{3(p+1)}{p} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{p+1}{p} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p+1}{p} & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (1 pont)
Innen a megoldás $x_4 = a \in \mathbb{R}, x_1 = 2 + (1 + \frac{3(p+1)}{p})a, x_2 = 1 - (1 - \frac{p+1}{p})a, x_3 = -\frac{p+1}{p}a.$ (2 pont)
Ha $p = 0$, akkor meg is kaptuk a lépcsős alakot (a 3. vezéregyes a 4. oszlopban van), ahonnan az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (2 pont)
Innen a megoldás $x_3 = b \in \mathbb{R}, x_1 = 2 - 3b, x_2 = 1 - b, x_4 = 0.$ (2 pont)

Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elírásokért (ha nem lett könnyebb tőlük a feladat) nem muszáj pontot levonni.

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Jó eredmény, megfelelő indoklással (pl. A és B megfelelő sorrendű szorzata kiszámolva vagy A bármely 2×2-es részmátrixának inverze (pl. Gauss-eliminációval) kiszámolva (mind a három invertálható lesz) és B megfelelő pozícióiba beírva, a maradék két hely pedig 0-kkal feltöltve) 10 pont. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, ha azok a megoldást, illetve annak menetét érdemben nem befolyásolják. Ha valaki csak B-t és az AB szorzatot közli, bármiféle részeredmény nélkül, de az eredmény hibás, akkor 0 pontot kapjon. Ha valaki nincs tisztában azzal, hogy nem négyzetes mátrixnak nincs inverze, az a többi, ettől független próbálkozásaira legfeljebb 4 pontot kapjon, azt is csak akkor, ha ezek a próbálkozások az elvi hibás megközelítéstől valóban jól láthatóan függetlenek. Általában is igyekezzünk meggyőződni róla, hogy a számítások mögött valameilyen (helyes) koncepció húzódik meg, az irány nélküli próbálkozásokra kevés (legfeljebb 2) pontot adjunk. Aki úgy véli, hogy alkalmas B nem létezik, mert A nem négyzetes, az 0 pontot kapjon. Alább közlünk egy, a szükségesnél némileg bonyolultabb megoldást, ami vélhetően sokak megoldására fog hasonlítani.

Keressük B-t $B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ alakban. Ekkor a, b, c-re a $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 10 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert, $d, e, f,$-re a $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 1 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldanunk. (2 pont)

Az első egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakra vezet, (2 pont)

ahonnan a megoldás $c \in \mathbb{R}, a = \frac{7}{2} - \frac{9}{2}c, b = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}c$. (1 pont)

A második egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakra vezet, (2 pont)

ahonnan a megoldás $f \in \mathbb{R}, d = -2 - \frac{9}{2}f, e = 1 + \frac{1}{2}f$. (1 pont)

Egy helyes megoldás felírása (vagyis a mátrix vagy elemeinek megadása). (2 pont)

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 9 \\ 2 & 4 & x & 3x \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

* * * * *

A rangot Gauss-eliminációval állapítjuk meg: az nem lesz más, mint a lépcsős alakban a vezéregyesek (vagyis a sorok) száma. (1 pont)

Gauss-eliminációval az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & x-8 & 3x-6 \end{pmatrix}$$

alakot kapjuk. (2 pont)

Két vezéregyesünk már van, (1 pont)

a harmadikat pedig akkor tudjuk létrehozni a harmadik oszlopban, ha $x \neq 8$. (2 pont)

Vagyis $x \neq 8$ esetén a rang 3. (1 pont)

Ha $x = 8$, akkor a harmadik oszlopban nem lesz vezéregyes, de a negyedik oszlopban álló elem 18, így a sort 18-cal osztva megkapjuk a harmadik vezéregyest is, (2 pont)

vagyis a rang ekkor is 3. (1 pont)

6*. Egy 10 egyenletből álló, 10 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer a kibővített együtthatómátrixával van megadva. Tudjuk, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

a) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása legyen?

b) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?

* * * * *

Az első állítás nem igaz, ehhez elég egy csupa 0-ból álló kibővített együtthatómátrixot szemügyre venni. Ennek bármely elemét megváltoztatva (sőt, akár bármely 9 elemét megváltoztatva) sem lehet elérni, hogy a megoldás egyértelmű legyen, mivel még mindig lesz csupa 0 sora, azaz a Gauss-elimináció során nem keletkezhet 10 vezéregyes. (3 pont)
A második állítás viszont igaz lesz. Tudjuk, hogy kezdetben az együtthatómátrix bal oldalának 10 sora és 10 oszlopa van. Futtassuk le a Gauss-eliminációt, ekkor – mivel van megoldás – megkapjuk a (redukált) lépcsős alakot. (1 pont)
A (redukált) lépcsős alaknak azonban nem lehet 10 sora, hiszen ekkor – a tanultak szerint – egyértelmű lenne a megoldás. (2 pont)
Kellett tehát az elimináció közben kapnunk legalább egy csupa 0 sort, amit töröltünk. (1 pont)
Ha ebben a sorban a jobb oldalon álló kezdeti értéket megváltoztatjuk, akkor az elimináció során nem csupa 0 sort, hanem tilos sort fogunk kapni, hiszen a bal oldalon továbbra is csupa 0, míg a jobb oldalon 0-tól különböző szám fog állni, így a második állítás csakugyan igaz. (3 pont)

Azt, hogy a csupa 0 sorban a jobb oldalon álló kezdeti értéket megváltoztatva csakugyan tilos sort fogunk kapni, precízen úgy lehet belátni, hogy a változást a csupa 0 sor jobb oldalán ejtjük meg, majd az elimináció lépéseit megfordítva haladunk visszafelé az inputig, ahol is a változás egyedül az említett elemet fogja érinteni. Ennek a gondolatnak a hiányáért persze nem kell pontot levonni.