Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. december 5.
MÁSODIK ZH PÓTLÁSA

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

* * * * *

A tanultak szerint a rang egyenlő a mátrixból Gauss-eliminációval kapott lépcsős alakban szereplő vezéregyesek számával. (2 pont)
A mátrix első sorát a másodikból levonva, majd az első sor x-szeresét a a harmadik sorból levonva az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-x^2 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. (2 pont)
A második oszlopban tehát pontosan akkor lesz vezéregyes, ha $x \neq 1$. (1 pont)
A második sort ekkor ($x \neq 1$) $(x-1)$-gyel osztva valóban megkapjuk a második vezéregyest. (1 pont)
Ha most $x \neq 0$ is teljesül, akkor a harmadik oszlopban is lesz vezéregyes, (1 pont)
tehát a mátrix rangja ekkor ($x \neq 0, x \neq 1$) 3. (1 pont)
Ha $x = 0$, akkor a harmadik oszlopban nincs vezéregyes, így ekkor a rang 2. (1 pont)
Végül, ha $x = 1$, akkor sem a második, sem a harmadik oszlopban nincs vezéregyes, így ekkor a rang 1. (1 pont)

Ha valaki csak azt bizonyítja be, hogy a rang $x = 1$ esetén 1, az 1 pontot kapjon, aki pedig azt, hogy $x = 0$ esetén a rang 2, az 2 pontot.

2. Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés mátrixa a jobbra látható mátrix. Adjunk meg a mátrixával egy olyan $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezést, melyre nem létezik olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $f \circ g = h$ teljesülne (ahol $f \circ g$ az f és g függvények kompozícióját jelöli). Állításunkat természetesen bizonyítsuk is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A tanultak szerint $[f \circ g] = [f] \cdot [g]$. (1 pont)
Ha tehát sikerülne olyan $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ mátrixot megadnunk, melyre nem létezik olyan $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, melyre $[f] \cdot B = A$, (2 pont)
akkor az a h lineáris leképezés, melynek A a mátrixa, megfelelne a feladat feltételének, (1 pont)
hiszen ha lenne olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $f \circ g = h$ teljesülne, akkor $A = [h] = [f \circ g] = [f] \cdot [g]$ lenne, ami lehetetlen. (1 pont)
Ilyen A mátrixot viszont nem nehéz megadni: mivel $[f] \cdot B$ oszlopai az $[f]$ oszlopainak a lineáris kombinációi, (2 pont)
elég, ha A-nak van olyan oszlopa (mondjuk az első), ami nem áll elő $[f]$ oszlopainak a lineáris kombinációjaként. (1 pont)

Ilyen mátrix például $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (1 pont)

hiszen az első oszlop első három koordináját megfigyelve az derül ki, hogy az első oszlop csak akkor lehetne $[f]$ oszlopainak lineáris kombinációja, ha minden együttható 1, ekkor viszont a negyedik koordináta nem 0 lenne, hanem 6. (1 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, mely minden vektorhoz annak az $x = y$ egyenesre vett tükörképét rendeli. Adjuk meg f-nek a $\{\underline{b_1} = (3, 7), \underline{b_2} = (2, 5)\}$ bázis szerinti mátrixát. (Azt, hogy f valóban lineáris transzformáció, nem kell belátni.)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Első megoldás. Jelöljük a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázist B-vel. $[f]_B$ első oszlopa a tanultak szerint $[f(\underline{b}_1)]_B$, második oszlopa $[f(\underline{b}_2)]_B$. (2 pont)
$f(\underline{b}_1)$-et és $f(\underline{b}_2)$-t nem nehéz meghatározni, az előbbi a $(7, 3)$ vektor, az utóbbi az $(5, 2)$ vektor. (1 pont)
A $(7, 3)$ vektor B szerinti koordinátavektorát Gauss-eliminációval (vagy máshogy) kiszámítva a $(29, -40)$ vektort kapjuk, (3 pont)
az $(5, 2)$ vektor B szerinti koordinátavektorának pedig $(21, -29)$ adódik. (3 pont)
A keresett mátrix tehát $\begin{pmatrix} 29 & 21 \\ -40 & -29 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Második megoldás. B-vel jelölve a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis (oszlop)vektorainak egyesítésével keletkező mátrixot, a következő összefüggést írhatjuk fel a bázistranszformációról tanultak alapján: $[f]_B = B^{-1}[f]B$. (1 pont)
A B^{-1} mátrixot Gauss-eliminációval kiszámítva $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ adódik. (3 pont)
Az $[f]$ mátrix kiszámításához $f(1, 0)$-t és $f(0, 1)$-et kell meghatároznunk, az előbbi $(0, 1)$, az utóbbi $(1, 0)$ lesz, (2 pont)
ez alapján $[f] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Innen $[f]_B = B^{-1}[f]B = \begin{pmatrix} 29 & 21 \\ -40 & -29 \end{pmatrix}$. (2 pont)

4. Tudjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $(x, 2)$ vektorhoz a $(4, x)$ vektort rendeli. Határozzuk meg f mátrixának két olyan sajátvektorát, melyek különböző sajátértékekhez tartoznak.

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük f mátrixát A-val. A könnyen kiszámítható például az $f(0, 2) = (4, 0)$ és az $f(2, 2) = (4, 2)$ egyenlőségekből (melyeket az $x = 0$, illetve $x = 2$ értékek behelyettesítésével kapunk).
(2 pont)
A lineáris leképezések ismert szabályait alkalmazva az első egyenlőségből $f(0, 1) = (2, 0)$, a két egyenlőségből együtt $f(1, 0) = f(\frac{1}{2}(2, 2) - (0, 1)) = \frac{1}{2}f(2, 2) - f(0, 1) = (0, 1)$. (2 pont)
Innen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (1 pont)
(Könnyű ellenőrizni, hogy az a lineáris leképezés, aminek a most megadott A a mátrixa, csakugyan minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $(x, 2)$ vektorhoz a $(4, x)$ vektort rendeli, de erre nincs szükség, mert a feladat szövegéből ez már következett.) A sajátértékek meghatározásához az A mátrix karakterisztikus polinomját a szokott módon felírva $x^2 - 2$ adódik, (1 pont)
melynek a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ a gyökei, ezek lesznek a sajátértékek. (2 pont)
A $\sqrt{2}$-höz tartozó sajátvektorok a $(\sqrt{2}y, y)$ alakú vektorok (ahol $y \neq 0$), a $-\sqrt{2}$-höz tartozó sajátvektorok a $(-\sqrt{2}y, y)$ alakú vektorok (ahol $y \neq 0$). A feladat ugyanakkor nem kérte, hogy adjuk meg az összes sajátvektort, elég megadni egyet a $\sqrt{2}$-höz (pl. $(\sqrt{2}, 1)$) és egyet a $-\sqrt{2}$-höz (pl. $(-\sqrt{2}, 1)$).
(2 pont)

Rosszul felírt mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak helyes meghatározásáért is jár az utolsó 5 pont, ha azonban a rossz mátrixnak nincsenek sajátértékei, akkor legfeljebb 2 pont adható.

Második megoldás. Jelöljük f mátrixát A-val. Keressünk a sajátvektorok közt olyat, aminek a második koordinátája 2 (nincs rá garancia, hogy van ilyen, de mivel őket egyszerű keresni, érdemes vele megpróbálkozni). (1 pont)
$(x, 2)$ pontosan akkor lesz sajátvektor, c sajátértékkel, ha $A \cdot (x, 2) = c \cdot (x, 2)$. (1 pont)
Ekkor $(cx, 2c) = c \cdot (x, 2) = A \cdot (x, 2) = f(x, 2) = (4, x)$, (2 pont)
így $cx = 4$ és $2c = x$, (1 pont)
ahonnan $c^2 = 2$, (1 pont)
vagyis $c = \sqrt{2}$ vagy $c = -\sqrt{2}$. (1 pont)
Az előbbi esetben $x = 2\sqrt{2}$, az utóbbiban $x = -2\sqrt{2}$ (1 pont)
és ellenőrzés után meggyőződhetünk róla, hogy $(2\sqrt{2}, 2)$ és $(-2\sqrt{2}, 2)$ csakugyan az A sajátvektorai, amik különböző sajátértékekhez tartoznak. (2 pont)

5. Határozzuk meg a $34x + 86y = 4$ egyenlet összes olyan megoldását, amelyre x és y egész.

* * * * *

Érdemes az egyenletet rögtön osztani 2-vel, de persze enélkül is megoldható a feladat. A szöveg szerint az x egészre teljesül, hogy $17x \equiv 2 \pmod{43}$. (1 pont)
A kongruenciát 2-vel szorozva $34x \equiv 4 \pmod{43}$ adódik, (1 pont)
ami az eredeti kongruenciával ekvivalens, hiszen 2 és 43 relatív prímek. (1 pont)
A bal oldalból $43x$-et kivonva, a jobb oldalhoz pedig 86-ot adva a $-9x \equiv 90 \pmod{43}$ kongruenciát kapjuk, (2 pont)
ahonnan (-9)-cel osztva $x \equiv -10 \pmod{43}$ (mivel -9 és 43 relatív prímek, a modulust nem kellett megváltoztatni). (2 pont)
Az x szám tehát $43k - 10$ alakba írható (ahol k egész). (1 pont)
Innen $y = \frac{2-17(43k-10)}{43}$, (1 pont)
vagyis $y = 4 - 17k$. (1 pont)

Ha valaki a kongruenciát nem tudja megoldani, de megállapítja, hogy annak van megoldása, az ezért kaphat 1 pontot. Aki nem foglalkozik azzal, hogy az osztás során változik-e a modulus, attól 1 pontot vonjunk le, ha valaki más módon oldja meg a kongruenciát és többször is mulasztást követ el az osztások során, attól minden ilyen hiányosságért vonjunk le 1 pontot. Hasonló a helyzet a szorzással: aki nem ellenőrzi az új és a régi kongruencia ekvivalenciáját és később sem foglalkozik az esetleges hamis gyökökkel, attól minden ilyen hiányosságért 1 pontot vonjunk le. Aki a kongruencia megoldása érdekében céltalan, nem előremutató lépéseket végez (és a megoldást persze nem kapja meg), az erre a részre ne kapjon pontot. Ha valaki a $17x \equiv 2 \pmod{43}$ kongruencia helyett a (könnyebben kezelhető) $43y \equiv 2 \pmod{17}$ kongruenciát oldja meg (helyesen), az persze ugyanúgy kapja meg az erre a részre járó 7 pontot.

6*. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ pedig olyan 2 magas oszlopvektorok, melyekre teljesül, hogy

$$A\underline{x} = \underline{x}, \quad A\underline{y} = 2\underline{y}, \quad A\underline{z} = 3\underline{z}.$$

Igazoljuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok közül legalább az egyik a nullvektor.

* * * * *

Ha $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ egyike sem a nullvektor, (1 pont)
akkor a sajátérték definíciója szerint az 1, a 2 és a 3 is az A sajátértéke lesz, (4 pont)
ami lehetetlen, hiszen a sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei, (1 pont)
A pedig 2×2-es mátrix, aminek karakterisztikus polinomja másodfokú, (2 pont)
vagyis (a másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint) legfeljebb két gyöke lehet. (2 pont)

Az előadáson szóba került (bár persze nem bizonyítottuk be), hogy $n \times n$-es mátrixnak legfeljebb n sajátértéke lehet, így ha valaki ezt az állítást használja a bizonyítás során, attól ezért ne vonjunk le pontot.