Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. december 5.
ELSŐ ZH PÓTLÁSA

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, az f egyenes egyenletrendszere pedig $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$. Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

* * * * *

A két egyenes paraméteres egyenletrendszerét felírva (vagy akár anélkül is) leolvasható, hogy e-nek irányvektora az $(1, 3, 5)$ vektor, f-nek pedig irányvektora a $(-2, -6, -10)$ vektor, (1 pont)
vagyis a két egyenes párhuzamos (hiszen az irányvektoraik párhuzamosak). (1 pont)
Mivel e-n rajta van a $P(0, 0, 0)$ pont és f-en a $Q(0, 3, 2)$, (1 pont)
ezért $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (0, 3, 2)$ párhuzamos az e-t és f-et tartalmazó S síkkal (ahol $\underline{q}$ és $\underline{p}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorok). (1 pont)
Párhuzamos ezen kívül S-sel az egyenesek bármely közös $\underline{v}$ irányvektora is, ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \underline{v} \times \overrightarrow{PQ}$ vektor. (2 pont)
Ezt a tanult képlettel határozzuk meg:

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k} = (-9, -2, 3). \qquad \text{(2 pont)}$$

A kapott $\underline{n}$ normálvektor és P (vagy Q) segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $-9x - 2y + 3z = 0$. (2 pont)
A megoldás során valamikor meg kell vizsgálni, hogy a $\underline{v}$, illetve $\overrightarrow{PQ}$ vektorok nem párhuzamosak-e, ekkor ugyanis a vektoriális szorzatuk nem lenne alkalmas normálvektornak. Ez persze következik abból, hogy e és f párhuzamosak, de nem esnek egybe, vagy abból is, hogy a vektoriális szorzat nem a nullvektor lett és persze a két vektor alapján közvetlenül is leolvasható. Ennek hiányáért mindenesetre ne vonjunk le pontot. Ha egy megoldó az egyenesek irányvektorait hibásan olvassa ki és ezért arra a következtetésre jut (a hibás irányvektorokból helyesen), hogy e és f nem párhuzamosak, akkor ezért a fenti pontozás szerint járó 1 pontot megkaphatja.

2. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^2$-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

* * * * *

A kérdéses vektorok halmaza pontosan akkor alkot alteret, ha zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, (0 pont)
vagyis bármely két, a feltételt kielégítő vektor összege is kielégíti a feltételt és bármely, a feltételt kielégítő vektor minden számszorosa is kielégíti a feltételt. (2 pont)
Legyen $\underline{u} = (1, 1)$, $\underline{v} = (-1, 1)$. Ekkor nyilván $\underline{u}$ és $\underline{v}$ is kielégíti a feltételt, (2 pont)
az $\underline{u} + \underline{v} = (0, 2)$ vektor azonban nem, (5 pont)
így a kérdéses vektorok nem alkotnak alteret. (1 pont)

Ha valaki nem talál ellenpéldát, de a skalárszorosra való zártságot (helyesen) megállapítja, az (az esetlegesen járó első 2 ponton felül) kaphat 1 pontot.

3. Döntsük el, hogy a jobbra látható három vektor a p valós paraméter mely értékeire lesz lineárisan független.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Az első és a harmadik vektor független halmazt alkot, hiszen egyik sem számszorosa a másiknak. Az újonnan érkező vektor lemmája miatt a második vektorral együtt tehát pontosan akkor alkotnak független halmazt, ha az nem áll elő az első és a harmadik lineáris kombinációjaként. (3 pont)
Az első két koordinátát vizsgálva az derül ki, hogy ha a második vektor az első és a harmadik lineáris kombinációja, akkor az elsőt 4-szer, a másodikat 3-szor kell vennünk. (3 pont)
Ez a harmadik koordinátákhoz is megfelel, (1 pont)
a negyedikekhez pedig pontosan akkor, ha $4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = p$, vagyis $p = 5$ esetén. (2 pont)
Ez lesz tehát az egyetlen olyan p, amire a három vektor nem független, a feladat kérdésére tehát a válasz: minden $p \neq 5$ esetén. (1 pont)

Második megoldás. Legyenek a vektorok sorban $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ és vizsgáljuk meg az $a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w} = \underline{0}$ egyenlőséget. (1 pont)
A három vektor pontosan akkor lesz független, ha ez csak $a = b = c = 0$ esetén teljesül. (1 pont)
A fenti vektoregyenlet ekvivalens az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -2 & 0 \\ 2 & p & -1 & 0 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixú egyenletrendszerrel. (2 pont)
Ezt Gauss-eliminációval az alábbi alakra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -5 - \frac{p-20}{3} & 0 \end{array}\right).$$

(2 pont)
Ennek pontosan akkor lesz az egyetlen megoldása $a = b = c = 0$, ha létre tudjuk hozni a harmadik vezéregyest is, (1 pont)
vagyis ha $-5 - \frac{p-20}{3} \neq 0$, tehát $p \neq 5$ esetén. (3 pont)

4. Adjuk meg a jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Ha nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak az 5-öt választhatjuk, (1 pont)
így az ötödik sorból a 4-et már nem, csak a 7-et választhatjuk (mert a negyedik oszlopból már vettünk elemet). (1 pont)
Hasonlóan folytatva, az első sorból csak az 1-et, (1 pont)
ezért a másodikból csak a 8-at, (1 pont)
végül a negyedikből csak a 3-at választhatjuk. (1 pont)
Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3$. Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,2,4,3,1 (hiszen az első sorból az ötödik elemet vettük, a másodikból a másodikat, stb). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 8 (hiszen 8 inverzióban álló pár van: $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(5,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,1)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: +. (1 pont)

5. Legyenek A és B olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$ és $A \cdot B = B \cdot A$. Mutassuk meg, hogy ha $A + B$ oszlopai lineárisan független halmazt alkotnak, akkor $A = B$.

* * * * *

Figyeljük meg, hogy $(A + B) \cdot (A - B) = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ az $n \times n$-es csupa 0 mátrixot jelöli. (2 pont)
Valóban, $(A+B) \cdot (A-B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B = A \cdot A - B \cdot B = \mathbf{0}$, ahol az első egyenlőség a mátrixszorzás disztributivitása miatt teljesül, a második egyenlőség $A \cdot B = B \cdot A$ miatt, végül a harmadik $A \cdot A = B \cdot B$ miatt. (4 pont)
Az $(A + B) \cdot (A - B)$ mátrix oszlopai az $A + B$ mátrix oszlopainak lineáris kombinációi. (1 pont)
Ha $A = B$ nem teljesül, akkor $A - B$ nem a nullmátrix, (1 pont)
ezért $A + B$ oszlopainak lesz olyan nem triviális lineáris kombinációja, mely a nullvektort adja (hiszen $(A + B) \cdot (A - B)$ minden oszlopa nullvektor), amivel a feladat állítását beláttuk. (2 pont)

6*. Egy négy egyenletből álló egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, melyben valamelyik ismeretlen értéke 0 lenne. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ szám, hogy az egyenletrendszernek nincs olyan megoldása sem, melyben valamelyik ismeretlen értéke a lenne.

* * * * *

Ha egy egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, melyben valamelyik ismeretlen értéke 0 lenne, akkor vagy egyáltalán nincs megoldás, (1 pont)
vagy a kibővített együtthatómátrixot Gauss-eliminációval lépcsős alakra hozva nem kapunk szabad paramétert (hiszen a szabad paraméter bármilyen értéket, így 0-t is felvehet). (2 pont)
Szabad paraméter azokhoz az oszlopokhoz tartozik, melyekben nincs vezéregyes. (1 pont)
A Gauss-elimináció után a mátrixnak legfeljebb négy sora van, így legfeljebb négy vezéregyes szerepelhet benne, (1 pont)
vagyis ha nincs szabad paraméter, akkor legfeljebb négy oszlopa lehet. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy az ismeretlenek száma az egyenletrendszerben legfeljebb négy. (1 pont)
Mivel nincs szabad paraméter, ha van megoldás, akkor az egyértelmű, (1 pont)
így csak négy olyan szám létezhet, amelyet a megoldásban valamelyik ismeretlen felvesz, (1 pont)
amiből a feladat állítása következik (hiszen a értékét öt szám közül választhatjuk). (1 pont)